INFRASTRUKTURA I EKOLOGIA TERENÓW WIEJSKICH
INFRASTRUCTURE AND ECOLOGY OF RURAL AREAS

Nr 3/III/2012, POLSKA AKADEMIA NAUK, Oddział w Krakowie, s. 197–208
Komisja Technicznej Infrastruktury Wsi

Edward Gąsiorek, Mariusz Grządziel, Elżbieta Musiał, Marian Rojek

POROWNANIE WSKAŹNIKA STANDARYZOWANEGO OPADU (SPI) WYZNACZONEGO ZA POMOCĄ ROZKŁADU GAMMA I ROZKŁADU NORMALNEGO DLA MIESIĘCZNYCH SUM OPADÓW

THE COMPARISON OF STANDARDIZED PRECIPITATION INDEX (SPI) EVALUATED BY GAMMA AND NORMAL DISTRIBUTION FOR MONTHLY PRECIPITATION SUMS

Streszczenie

W pracy przedstawiono dwie metody obliczania wskaźnika standaryzowanego opadu (SPI-standardized precipitation index) [McKee i in. 1993, 1995]. Pierwsza z nich jest oparta na fakcie, że empiryczne rozkłady częstości miesięcznych sum opadów najczęściej podlegają rozkładowi gamma (Kaczmarek 1970). Weryfikacja hipotezy o zgodności empirycznych rozkładów miesięcznych sum opadów w wieloleciu 1964-2009 we Wrocławiu-Swojcu z rozkładem gamma, potwierdziła ten fakt. Druga metoda wyznaczania wskaźnika standaryzowanego opadu polega na obliczeniu wielkości: $x = \Phi^{-1}(F(x))$, gdzie: F jest dystrybuantą rozkładu gamma z parametrami estymowanymi na podstawie analizowanego zbioru danych, a Φ dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego (McKee i in. 1993,1995). W praktyce często wykorzystywany jest następujący fakt: dla zmiennej losowej X o rozkładzie gamma, zmienna $Z = \sqrt[3]{X}$ ma w przybliżeniu rozkład normalny (Krishnamoorthy K. i in. 2008). W celu wyznaczenia współczynnika SPI stosowane są również transformacje: $x \to \sqrt[3]{c+x}$ oraz $x \to \ln x$. Za pomocą dwóch prezentowanych metod wyznaczono wskaźniki standaryzowanego opadu (SPI) dla miesięcznych sum opadów w wieloleciu 1964-2009. Następnie porównano ze sobą oceny warunków opadowych dla miesięcznych sum za pomocą SPI, wyznaczonego z zastosowaniem rozkładu gamma i rozkładu normalnego. Stwierdzono, że klasyfikację warunków opadowych za pomocą wskaźnika SPI

można przeprowadzić korzystając zarówno z rozkładu gamma jak i z rozkładu normalnego.

Słowa kluczowe: wskaźnik standaryzowanego opadu, rozkład gamma, standaryzowany rozkład normalny

Summary

In the study two methods of counting SPI (standardized precipitation index) are given (McKee i in. 1993, 1995). The first of them is based on the fact that empirical distributions of monthly precipitation sums are usually gamma distributed (Kaczmarek 1970). The verification of goodness-of fit test hypothesis of empirical distribution of monthly precipitation sums in the years 1964-2009 in Wrocław-Swojec, with gamma distribution, confirmed that. The second method of SPI evaluation relies on counting the value: $x = \Phi^{-1}(F(x))$ *, where F is a distribution function of gamma distribution with parameters estimated on the basis of analyzed data set, and* Φ *is a distribution function of standardized normal distribution (McKee i in. 1993,1995). In practice, the following fact is often taken into account: for a random variable X gamma distributed, variable* $Z = \sqrt[3]{X}$ *has approximately normal distribution (Krishnamoorthy K. i in. 2008). In order to estimate SPI, other transformations are tested:* $x \to \sqrt[3]{c+x}$ *and* $x \to \ln x$.. *With the use of those two methods, SPI for monthly precipitation sums in the years 1964-2009 were evaluated. Then, precipitation conditions for monthly precipitation sums, assessed by SPI counted with the use of gamma or normal distribution, were compared. It has been shown that the precipitation conditions may be classified with the use of SPI based both on gamma and normal distributions.*

Key words: *standardized precipitation index, relative precipitation index, probability distribution*

WSTĘP

W literaturze spotykamy różne metody wyznaczania wskaźnika standaryzowanego opadu (SPI-standardized precipitation index) [Mckee i in. 1993, 1995]. W jednej z metod wykorzystuje się rozkład normalny. Wyznaczanie SPI z zastosowaniem rozkładu normalnego polega na obliczeniu wielkości: $x = \Phi^{-1}(F(x))$, gdzie: F jest dystrybuantą rozkładu gamma z parametrami estymowanymi na podstawie analizowanego zbioru danych, a Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego [McKee i in. 1993,1995]. W praktyce często wykorzystywany jest następujący fakt: dla zmiennej losowej X o rozkładzie gamma zmienna $Z = \sqrt[3]{X}$ ma w przybliżeniu rozkład normalny (Krishnamoorthy K. i in. 2008). Wykorzystując ten fakt można zaproponować przybliżony sposób obliczania wskaźnika SPI poprzez standaryzację zmiennej losowej

$Z = \sqrt[3]{X}$. Do obliczenia wskaźnika standaryzowanego opadu stosowane są również inne transformacje: $x \to \sqrt[3]{c + x}$; $x \to \ln x$.

Drugie podejście polega na zastosowaniu rozkładu gamma do wyznaczania wskaźnika SPI. Wyznaczanie SPI z zastosowaniem rozkładu gamma jest oparte na fakcie, że empiryczne rozkłady częstości miesięcznych sum opadów kształtem najczęściej przypominają rozkład gamma (Kaczmarek, 1970). Wyznaczenie funkcji gęstości dla rozkładu gamma wymaga znajomości dwóch parametrów α i β, znanych jako parametr skali i kształtu. W pracy wykorzystano podejście Edwards i Mckce [1997)], którzy zaproponowali jako przybliżenie parametrów α i β estymatory wyznaczone przez Thoma [1958] metodą największej wiarygodności.

Celem prezentowanej pracy jest porównanie klasyfikacji warunków opadowych okresów miesięcznych w wieloleciu 1964-2009 za pomocą wskaźnika standaryzowanego opadu wyznaczonego bezpośrednio z rozkładu gamma i z zastosowania wymienionych wcześniej transformacji prowadzących do rozkładu normalnego.

METODY BADAŃ

Pierwszy etap badań, to weryfikacja hipotezy o zgodności rozkładów empirycznych miesięcznych sum opadów z rozkładem gamma za pomocą testu χ^2. Badania przeprowadzono dla każdego miesiąca w roku na podstawie pomiarów wykonanych w obserwatorium Agro- i Hydrometeorologii w wieloleciu 1964-2009 we Wrocławiu-Swojcu. Założono, że miesięczne sumy opadów w wieloleciu 1964-2009 we Wrocławiu-Swojcu podlegają rozkładowi gamma.

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej X o rozkładzie gamma ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\dfrac{x}{\lambda}) & dla \quad x > 0 \\ 0 & dla \quad x \le 0 \end{cases} \tag{1}$$

gdzie:

α>0 jest parametrem kształtu,

β jest parametrem skali,

$\Gamma(\alpha)$ jest funkcją gamma zdefiniowaną następująco:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \,. \tag{2}$$

Edwards i Mekce [1997] zaproponowali jako przybliżenie parametrów α i β estymatory wyznaczone przez Thoma [1958] metodą największej wiarygodności postaci:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{4A}(1 + \sqrt{1 + \frac{4A}{3}}) \tag{3}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}}, \text{ gdzie } A = \ln(\bar{x}) - \frac{\sum \ln(x)}{n}, \tag{4}$$

gdzie: n jest liczbą obserwacji w ciągu opadowym.

Całkując funkcję gęstości ze względu na x i wstawiając zamiast parametrów α, β ich estymatory $\hat{\alpha}\ i\ \hat{\beta}$ otrzymuje się dystrybuantę dla miesięcznych sum opadowych, dla określonego opadu x:

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy = \frac{1}{\hat{\beta}^{\hat{\alpha}}\Gamma(\hat{\alpha})} \int_0^x y^{\hat{\alpha}} \exp(-\frac{x}{\hat{\beta}}) \cdot \tag{5}$$

Mając dopasowany rozkład dla miesięcznych sum opadowych można, idąc za Edwards i Mckee (1997), dokonać przybliżonej transformacji rozkładu gamma do standardowego rozkładu normalnego, wyznaczając wskaźniki SPI wprost z następujących wzorów [Abramowitz i Stegun 1965]:

$$SPI = -(t - \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3}),\ \ dla \quad 0 < H(x) \le 0.5 \tag{6}$$

$$SPI = t - \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3},\ \ dla \quad 0.5 < H(x) < 1, \tag{7}$$

gdzie:
$$t = \sqrt{\ln\left[\frac{1}{(H(x))^2}\right]}\ \ dla \quad 0 < H(x) \le 0.5, \tag{8}$$

$$t = \sqrt{\ln\left[\frac{1}{(H(x))^2}\right]}\ \ dla \quad 0.5 < H(x) < 1\ \ dla \tag{9}$$

W obliczeniach zastosowano następujące współczynniki zaproponowane przez Abramowitz i Stegun [1965]:

$$\begin{aligned} c_0 &= 2.515517 \quad c_1 = 0.802853 \quad c_2 = 0.010328 \\ d_1 &= 1.432788 \quad d_2 = 0.189269 \quad d_3 = 0.001308 \end{aligned} \tag{10}$$

Wyznaczanie SPI z zastosowaniem rozkładu normalnego polega na obliczeniu wielkości:

$$x = \Phi^{-1}(F(x)) \tag{11}$$

gdzie:

F – dystrybuanta rozkładu gamma z parametrami estymowanymi na podstawie analizowanego zbioru danych

Φ – dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego [McKee i in. 1993,1995].

W praktyce często wykorzystywany jest następujący fakt: dla zmiennej losowej X o rozkładzie gamma zmienna $Z = \sqrt[3]{X}$ ma w przybliżeniu rozkład normalny [Krishnamoorthy i. in. 2008]. Wykorzystując ten fakt można zaproponować następujący przybliżony sposób obliczania współczynnika SPI: dla danej wartości $x \geq 0$

$$SPI = \frac{\sqrt[3]{x} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \tag{12}$$

gdzie $\hat{\mu}$ i $\hat{\sigma}$ oznaczają średnią i odchylenie standardowe dla danych poddanych transformacji

$$x \to \sqrt[3]{x}\,. \tag{13}$$

Do obliczania współczynnika SPI stosowane są również transformacje:

$$x \to \sqrt[3]{c + x} \text{ oraz } x \to \ln x\,, \tag{14}$$

W dalszym ciągu rozważań będziemy obliczać SPI przy użyciu podejścia, w którym korzystamy z jednej z transformacji opisanej równaniami (13) i (14).

Etapy prowadzące do wyznaczenia wskaźnika SPI są następujące:

– normalizacja okresowych sum opadów, za pomocą wybranych transformacji,

– weryfikacja hipotezy o zgodności rozkładu transformowanej zmiennej z rozkładem normalnym za pomocą testu Shapiro-Wilka,

– standaryzacja transformowanych danych i wyznaczenie SPI.

Dla sumy opadów x (w pracy są to miesięczne sumy opadów) wskaźnik SPI jest zdefiniowany za pomocą wzoru:

$$SPI = \frac{Y - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \tag{15}$$

gdzie:

Y – zmienna losowa, której wartościami są miesięczne sumy opadów po transformacji (13) lub (14), przekształcającej rozkład gamma w rozkład normalny,

$\hat{\mu}$ – wartość estymatora parametru μ (średnia wartość znormalizowanego ciągu sum opadów),

$\hat{\sigma}$ – wartość estymatora parametru σ (odchyleniem standardowym znormalizowanego ciągu sum opadów).

System klasyfikacji warunków opadowych za pomocą SPI dla warunków polskich, zaproponowany przez Łabędzkiego [2006] oraz wartości prawdopodobieństw występowania różnych rodzajów okresów zawarto w tabeli 1.

Tabela 1. Klasyfikacja warunków opadowych według wskaźnika standaryzowanego opadu (SPI) i odpowiadające im prawdopodobieństwa
Table 1. Precipitation condition classification according to the standardized precipitation index (SPI) and corresponding probabilities

SPI	Okres Period	Prawdopodobieństwa Probabilities
SPI≤-2,0	ekstremalnie suchy / extremely dry	P(SPI≤-2)=0,02
-2,00<SPI≤-1,50	bardzo suchy /very dry	P(-2<SPI≤-1,5)=0,04
-1.50<SPI≤-0,50	suchy / dry	P(-1,5<SPI≤-0,5)=0,25
-0,5<SPI<0,5	normalny / normal	P(-0,5<SPI<0,5)=0,38
0,5 ≤ SPI<1,5	wilgotny / wet	P(0,5 ≤ SPI<1,5)=0,25
1,5 ≤ SPI<2	bardzo wilgotny / very wet	P(1,5≤SPI<2)=0,04
SPI≥2	ekstremalnie wilgotny / extremely wet	P(SPI≥2)=0,02

Źródło: opracowane przez Łabędzkiego [2006].

WYNIKI BADAŃ

Pierwszy etap badań, to weryfikacja hipotezy o zgodności rozkładów empirycznych miesięcznych sum opadów z rozkładem gamma za pomocą testu χ^2. Badania przeprowadzono dla każdego miesiąca w roku na wynikach pomiarów przeprowadzonych w obserwatorium Agro- i Hydrometeorologii w wieloleciu 1964-2009 we Wrocławiu-Swojcu. Weryfikacja hipotezy o zgodności empirycznych rozkładów miesięcznych sum opadów w wieloleciu 1964-2009 z rozkładem gamma, potwierdziła ten fakt. Następnie dobierając odpowiednią transformację i weryfikując hipotezę o zgodności transformowanych miesięcznych sum opadowych z rozkładem normalnym, dopasowano rozkłady miesięcznych sum opadów do rozkładu normalnego. W tabeli 2 zamieszczono wybrane transformacje miesięcznych sum opadów, które dały najlepszą zgodność z rozkładem normalnym wraz z wynikami weryfikacji hipotezy o zgodności z rozkładem normalnym za pomocą testu Shapiro-Wilka.

Tabela 2. Wybrane transformacje normalizujące miesięczne sumy opadów w okresie 1964-2009
Table 2. Selected transformations normalizing monthly precipitation sum in the years 1964-2009

Miesiąc Month	Transformacja Transformation	p-value test Shapiro-Wilka	Skośność przed transformacją Skewness before transformation	Skośność po transformacji Skewness after transformation		
				$Y=\sqrt[3]{P}$	$Y=\sqrt[3]{P+10}$	$\ln P$
Styczeń January	$Y=\sqrt[3]{P}$	0,64	1.08	**-0,15**	0,18	-0.71
Luty February	$Y=\sqrt[3]{P+10}$	0,60	0.33	-0.70	**-0,28**	-1,36
Marzec March	$Y=\sqrt[3]{P}$	0,92	1.04	**-0,06**	0,34	-0.96
Kwiecień April	$Y=\sqrt[3]{P+10}$	0,94	0.54	-0,62	**-0,18**	-1,57
Maj May	$Y=\sqrt[3]{P+10}$	0,42	0.39	-0,52	**-0,29**	-1,10
Czerwiec June	$Y=\sqrt[3]{P+10}$	0,47	0.65	-0,16	**-0,02**	-0,65
Lipiec Julay	$Y=\sqrt[3]{P+10}$	0,81	1.01	-0,18	**-0,01**	-0.78
Sierpień August	$Y=\sqrt[3]{P}$	0,16	1.19	**0,06**	0.38	-1,17
Wrzesień September	$Y=\sqrt[3]{P+10}$	0,55	0.61	-0,15	**0,07**	-0,69
Październik October	$Y=\sqrt[3]{P}$	0,76	1.06	**-0,13**	0.19	-0,78
Listopad November	$\ln P$	0,86	1.05	0,34	0.48	**-0.04**
Grudzień December	$Y=\sqrt[3]{P+10}$	0,96	0.86	-0,19	**0,14**	-0,90

Źródło: obliczenia własne.
gdzie: *P*- miesięczne sumy opadów w wieloleciu 1964-2006, natomiast *p-value* jest najniższym poziomem istotności α, przy którym hipoteza zerowa mogłaby być odrzucona przy otrzymanej wartości statystyki testowej Shapiro-Wilka.

Biorąc pod uwagę wyniki zawarte w tabeli 3 należy zwrócić uwagę na fakt, że najlepszej transformacji zmieniającej rozkład gamma miesięcznych sum opadów w rozkład normalny towarzyszy najniższy współczynnik skośności.

Po wyznaczeniu wskaźników SPI bezpośrednio z rozkładu gamma (SPI_G) i z rozkładu normalnego (SPI_N) zidentyfikowano warunki opadowe we wszystkich miesiącach w roku w wieloleciu 1964-2009. Ze względu na ograniczenia redakcyjne nie przedstawiono wyników identyfikacji poza jednym miesiącem. Do identyfikacji został wybrany miesiąc lipiec, ze względu na po-

wódź w 1997 roku. Wyniki klasyfikacji warunków opadowych pod względem ich nadmiarów lub niedoborów dla lipca w wieloleciu 1964-2009 za pomocą obu metod zawarto w tabeli 3.

Tabela 3. Klasyfikacja warunków opadowych w lipcu w wieloleciu 1964-2009 we Wrocławiu-Swojcu za pomocą SPI_N oraz SPI_G
Tabela 3. Precipitation conditions classification according to the standardized precipitation index SPI_N and SPI_G in Wrocław-Swojec in July in the years 1964-2009

Rok-Year	SPI_N	Klasyfikacja-Classification	SPI_G	Klasyfikacja-Classification	SPI_N-SPI_G
1964	-0.87	umiarkowanie suchy	-0.83	umiarkowanie suchy	0.04
1965	1.28	umiarkowanie mokry	1.26	umiarkowanie mokry	-0.02
1966	0.81	umiarkowanie mokry	0.81	umiarkowanie mokry	0.00
1967	-0.29	normalny	-0.25	normalny	0.04
1968	0.12	normalny	0.15	normalny	0.03
1969	-1.72	bardzo suchy	-1.83	bardzo suchy	-0.10
1970	-0.04	normalny	0.00	normalny	0.04
1971	-0.87	umiarkowanie suchy	-0.83	umiarkowanie suchy	0.03
1972	0.29	normalny	0.32	normalny	0.03
1973	0.28	normalny	0.30	normalny	0.03
1974	0.12	normalny	0.15	normalny	0.03
1975	0.51	umiarkowanie mokry	0.53	umiarkowanie mokry	0.02
1976	0.62	umiarkowanie mokry	0.64	umiarkowanie mokry	0.01
1977	0.12	normalny	0.15	normalny	0.03
1978	0.21	normalny	0.24	normalny	0.03
1979	-0.35	normalny	-0.30	normalny	0.04
1980	1.99	bardzo mokry	1.93	bardzo mokry	-0.06
1981	1.14	umiarkowanie mokry	1.12	umiarkowanie mokry	-0.02
1982	-0.33	normalny	-0.28	normalny	0.04
1983	-1.04	umiarkowanie suchy	-1.02	umiarkowanie suchy	0.02
1984	-0.27	normalny	-0.22	normalny	0.04
1985	-1.06	umiarkowanie suchy	-1.04	umiarkowanie suchy	0.02
1986	0.83	umiarkowanie mokry	0.83	umiarkowanie mokry	0.00
1987	-0.26	normalny	-0.21	normalny	0.04
1988	0.08	normalny	0.12	normalny	0.04
1989	-0.80	umiarkowanie suchy	-0.76	umiarkowanie suchy	0.04
1990	-1.72	bardzo suchy	-1.83	bardzo suchy	-0.10
1991	-1.02	umiarkowanie suchy	-0.99	umiarkowanie suchy	0.02
1992	-1.23	umiarkowanie suchy	-1.23	umiarkowanie suchy	0.00
1993	0.72	umiarkowanie mokry	0.73	umiarkowanie mokry	0.01
1994	-1.95	bardzo suchy	-2.14	ekstremalnie suchy	-0.19

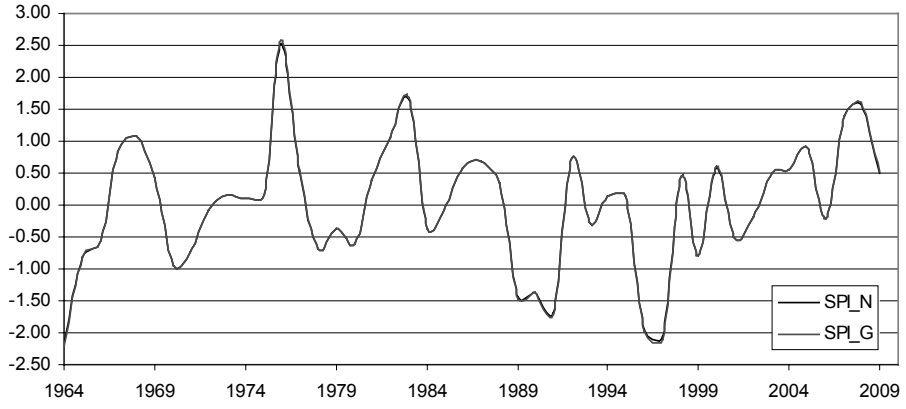
1995	-0.22	normalny	-0.17	normalny	0.04
1996	0.52	umiarkowanie mokry	0.54	umiarkowanie mokry	0.02
1997	2.36	ekstremalnie mokry	2.27	ekstremalnie mokry	-0.08
1998	0.42	normalny	0.44	normalny	0.02
1999	1.17	umiarkowanie mokry	1.16	umiarkowanie mokry	-0.02
2000	0.72	umiarkowanie mokry	0.73	umiarkowanie mokry	0.01
2001	1.60	bardzo mokry	1.55	bardzo mokry	-0.04
2002	-1.33	umiarkowanie suchy	-1.34	umiarkowanie suchy	-0.01
2003	-0.43	normalny	-0.38	normalny	0.04
2004	-0.23	normalny	-0.18	normalny	0.04
2005	0.53	umiarkowanie mokry	0.55	umiarkowanie mokry	0.02
2006	-1.96	bardzo suchy	-2.15	ekstremalnie suchy	-0.20
2007	0.78	umiarkowanie mokry	0.79	umiarkowanie mokry	0.00
2008	-0.24	normalny	-0.19	normalny	0.04
2009	0.99	umiarkowanie mokry	0.98	umiarkowanie mokry	-0.01

Źródło: obliczenia własne.

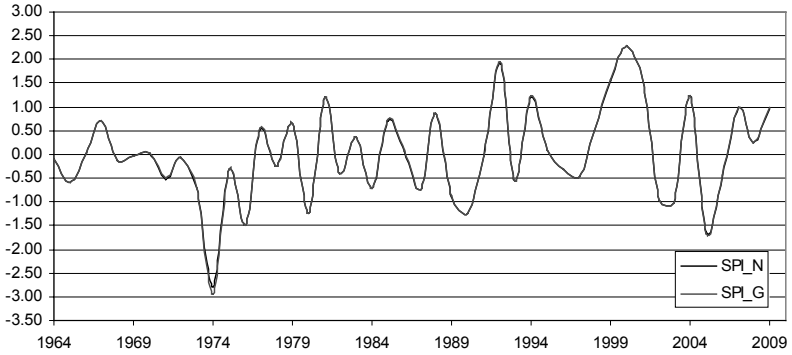
Różnica pomiędzy wskaźnikiem wyznaczonym z zastosowaniem rozkładu gamma (SPI_G) i z zastosowaniem rozkładu normalnego (SPI_N) jest tak mała, że tylko w jednym przypadku te klasyfikacje są niezgodne. Był to rok 2006, w którym wg wskaźnika SPI_N miesiąc lipiec jest bardzo suchy, podczas gdy według wskaźnika SPI_G lipiec był ekstremalnie suchy.

Graficzną prezentację zgodności dla stycznia, marca, czerwca, września, listopada i grudnia w wieloleciu 1964-2009 przedstawiono na rysunku 1. Wybór miesięcy został dokonany w sposób losowy. W pozostałych miesiącach zgodność SPI_N i SPI_G jest również tak dobra.

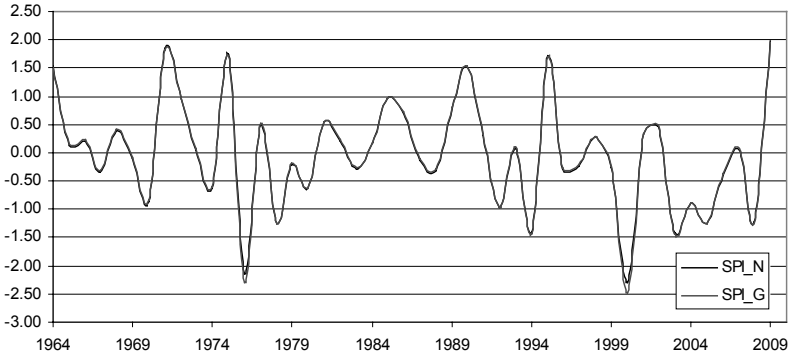
a)



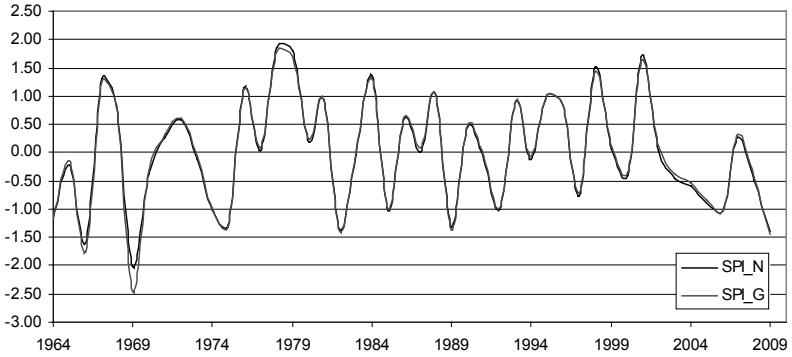
b)


3.00
2.50
2.00
1.50
1.00
0.50
0.00
-0.50
-1.00
-1.50
-2.00
-2.50
-3.00
-3.50
1964
1969
1974
1979
1984
1989
1994
1999
2004
2009
SPI_N
SPI_G

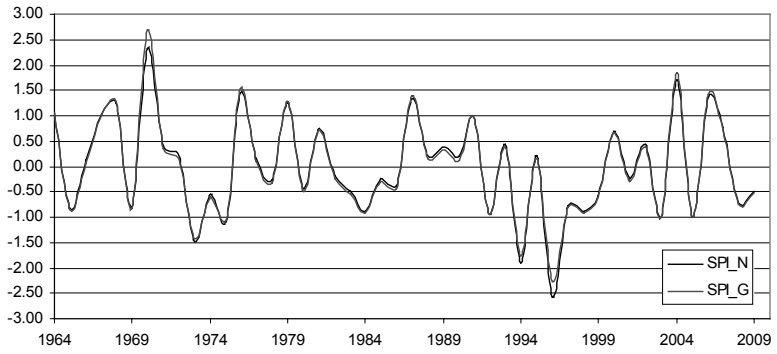
c)


2.50
2.00
1.50
1.00
0.50
0.00
-0.50
-1.00
-1.50
-2.00
-2.50
-3.00
1964
1969
1974
1979
1984
1989
1994
1999
2004
2009
SPI_N
SPI_G

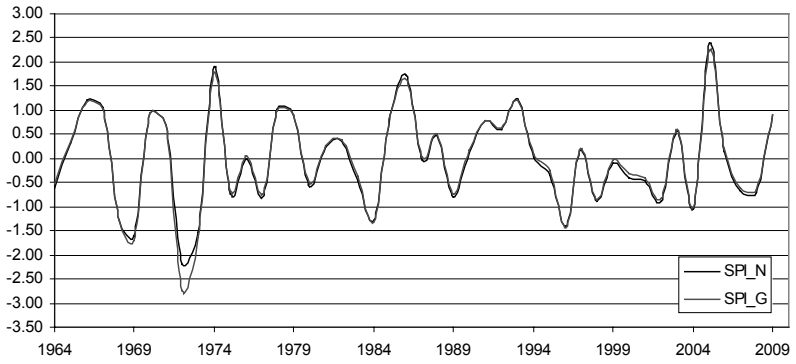
d)


2.50
2.00
1.50
1.00
0.50
0.00
-0.50
-1.00
-1.50
-2.00
-2.50
-3.00
1964
1969
1974
1979
1984
1989
1994
1999
2004
2009
SPI_N
SPI_G

e)



f)



Rysunek 1. SPI_N i SPI_G dla wybranych miesięcy w wieloleciu 1964-2009: a) styczeń; b) marzec; c) czerwiec; d) wrzesień; e) listopad; f) grudzień
Figure 1. SPI_N and SPI_G for chosen months in the years 1964-2009: a) January; b) March; c) June; d) September; e) November; f) December

WYNIKI BADAŃ

Wyniki uzyskane na podstawie danych empirycznych pochodzących z Obserwatorium Agro- i Hydrometeorologii we Wrocławiu-Swojcu wyraźnie wskazują na to, że klasyfikację warunków opadowych pod względem ich nadmiarów lub niedoborów w odniesieniu do miesięcznych sum opadów za pomocą wskaźnika standaryzowanego opadu, można przeprowadzać korzystając zarówno z rozkładu gamma jak i z rozkładu normalnego.

BIBLIOGRAFIA

Abramowitz M., Stegun I.A., 1965. *Handbook of Mathematical Formulas,* Graphs and Mathematical Tables. Dover Publications: New York. s. 1250.

Edwards DC, McKee TB., 1997. *Characteristics of 20th century drought in the United States at multiple scales.* Climatology Report 97-2, Department of Atmospheric Science, Colorado State University, Fort Collins.

Kaczmarek Z., 1970. *Metody statystyczne w hydrologii i meteorologii*. Warszawa, WKiŁ s. 312.

Mathew T.; Mukherjee S., 2008. *Normal-based methods for a Gamma Distribution: prediction and tolerance intervals and stress-strenght reliability*. Technometrics, February 2008, vol.50, no.1 pp.69-78.

Łabędzki L., 2006. *Susze rolnicze. Zarys problematyki oraz metody monitorowania i klasyfikacji*. Woda Środowisko Obszary Wiejskie. Rozprawy naukowe i monografie. Nr 17 ss. 107.

McKee T. B., Doesken N. J., Kleist J., 1993. *The relationship of drought frequency and duration to time scales.* Proc. 8th Conf. Applied Climatology, 17-22 January 1993, Anaheim, California, ss. 179–184.

McKee T. B., Doesken N. J., Kleist J., 1995. *Drought monitoring with multiple time scales*. Preprints 9th Conf. Applied Climatology, 15-20 January 1995, Dallas, Texas, ss. 233–236.

Thom H.C.S., 1958. *A note on the gamma distribution.* Monthly Weather Review 86: s. 117-122.

Dr hab. Elżbieta Musiał prof. nadzw.
Edward Gąsiorek
Mariusz Grządziel
Katedra Matematyki
Marian Rojek
Instytut Kształtowania i Ochrony Środowiska
Uniwersytet Przyrodniczy
ul.Grunwaldzka 53,
50-357 Wrocław
tel. 71-3205-615