

*Klemens Godek, Waldemar Krupiński*

## **METODYKA OCENY SPRZĘTU GEODEZYJNEGO ZA POMOCĄ TESTÓW STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ**

---

### ***METHODOLOGY OF THE EVALUATION OF GEODETIC EQUIPMENT USING TESTS OF MATHEMATICAL STATISTICS***

#### **Streszczenie**

W pracy przedstawiono problem związany z ustalaniem dokładności użytkowej instrumentów geodezyjnych. Wyniki pomiarów testowych zostaną poddane ocenie za pomocą testów statystyki matematycznej tzn. za pomocą statystycznego testu Abbe'go oraz testu Shapiro-Wilka. Omówione zostały podstawy teoretyczne testów zgodności oraz podane zostały sposoby ich praktycznego zastosowania.

Z przeprowadzonych badań wynika wniosek, że badane instrumenty spełniają warunki obu testów statystycznych, a więc nadają się do wykonywania pomiarów w geodezji inżynierskiej.

**Słowa kluczowe:** dokładność użytkowa, badania testowe, statystyka matematyczna, testy zgodności, rozkład empiryczny, hipoteza statystyczna

#### **Summary**

*The paper presents the problem of determining the accuracy usable of geodetic Instruments. The results of test measurements will be evaluated using tests of mathematical statistics by the statistical Abbe's test and the Shapiro - Wilk test. Will discuss the theoretical basis for conformance testing and are given ways of their practical application.*

*The study concludes that the tested instruments meet the conditions of both statistical tests and thus are suitable for making measurements in engineering geodesy .*

**Key words:** accuracy usable, test investigation, mathematical statistics, conformance tests, empirical distribution, statistical hypothesis

## WPROWADZENIE

Każdy skonstruowany i wyprodukowany instrument geodezyjny ma podane parametry dokładnościowe w prospektach firmowych i w instrukcjach obsługi. Na przykład teodolit T2000 jak podaje [Lizończyk 2000] ma nominalną dokładność szacowaną na 3<sup>cc</sup>. Jest to dokładność pomiaru kierunku poziomego w jednej serii jaką można osiągnąć przy starannym wykonywaniu czynności pomiarowych i w dobrych warunkach atmosferycznych. Jednak dopiero praktyczne użycie instrumentu w terenowych pracach geodezyjnych umożliwi faktyczne ocenienie jego dokładności oraz poznanie jego zalet, a także wad i niedoskonałości.

Na podstawie wykonanych pomiarów testowych określimy dokładność użytkową danego instrumentu, jak podaje [Lizończyk 2000] – jest to dokładność jaką można uzyskać, stosując określony instrument pomiarowy i jego wyposażenie pomocnicze w określonych warunkach terenowych i atmosferycznych. Przy wyznaczaniu i szacowaniu dokładności użytkowej instrumentów pomiarowych należy stosować metody testowe określone przez Normę Międzynarodową ISO 8322 „Obiekty budowlane – instrumenty pomiarowe – metody ustalania dokładności użytkowej” [Pawłowski 1997].

Norma ta [Pawłowski 1997] przyjmuje, że:

- poszczególne procedury są tak zaprojektowane, aby w znacznym stopniu eliminować błędy systemowe;
- w każdej procedurze wykonuje się dwie serie pomiarowe w różnych dniach i warunkach;
- dokładność użytkowa jest wyrażona za pomocą odchylenia standardowego.

Tematem opracowania będą polowe badania sprawdzające przydatność teodolitów precyzyjnych THEO 010 Zeissa i Wild T 2002 do prac inżynierskich, za pomocą testów Abbe'go oraz Shapiro-Wilka.

Celem oceny przydatności teodolitów do wykonywania precyzyjnych pomiarów kątowych wykonano pomiary badawcze, które polegały na 20-krotnym pomiarze tego samego kąta, a wyniki zestawiono w tabeli 1 i tabeli 2.

## PODSTAWY TEORETYCZNE TESTU ABBE'GO

Za pomocą testu można ustalić wpływ czynników systematycznych na wartość przeciętną (średnią) w szeregu pomiarów.

W celu stwierdzenia zmian średniej w szeregu niezależnych pomiarów:

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n,$

należy utworzyć  $n-1$  kolejnych różnic:

$$d_i = x_{i+1} - x_i$$

$$\forall i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (1)$$

Jeżeli badane pomiary stanowią próbkę z populacji normalnej  $X$  o parametrach:

$$E(X) = a$$

$$i \quad V(X) = \sigma^2$$

$$\text{to:} \quad E(d_i^2) = E(x_{i+1} - x_i)^2 = 2V(X) = 2\sigma^2 \quad (2)$$

Nieobciążonym estymatorem wariacji  $\sigma^2$  jest kwadrat średniego błędu określonego wzorem:

$$m_d^2 = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 \quad (3)$$

gdzie wskaźnik  $d$  oznacza, że wartość  $m_d^2$  obliczona jest na podstawie kolejnych różnic (1).

Wartość ta jest odpowiednikiem kwadratu „zwykłego” błędu średniego  $m^2$ , obliczonego według wzoru:

$$m^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n v_i^2 \quad (4)$$

Praktyczne zastosowanie metody Abbe`go do testowania błędów systematycznych wygląda następująco:

1. obliczamy charakterystykę  $m^2$  wg wzoru (3),
2. obliczamy odchylenie standardowe  $m_d^2$  wg wzoru (4),
3. obliczamy iloraz  $\frac{m_d^2}{m^2} \stackrel{\text{ozn}}{=} \tau$ ,
4. odczytujemy z tablic Abbe`go wartość  $\frac{\tau_\alpha}{n} \stackrel{\text{ozn}}{=} \tau_q$ .

Jeśli  $\tau > \tau_q$ , oznacza to – badane pomiary nie zawierają błędów systematycznych.

W przypadku gdy  $\tau < \tau_q$  – pomiary są obarczone błędami i testowany sprzęt należy poddać rektyfikacji.

Obliczenia do testu Abbe`go podane są:

1. dla teodolitu optycznego Theo 010 Zeissa – w tabeli 1,
2. dla teodolitu elektronicznego T2002 Wilda – w tabeli 2.

Tabela 1. Obliczenia wyników pomiarów Theo 010 Zeiss

$i$	$x_i$ g c cc	$d_i = x_{i+1} - x_i$ cc	$d_i^2$	$v_i = x_i - \bar{x}$	$v_i^2$	Obliczenia
1	79 61 76			+7,1	50,41	$\bar{x} = 79^g 61^c 68^{cc},9$ $\sum_i d_i^2 = 1592$ $m_d^2 = 41,9$ $\sum_i v_i^2 = 1027,8$ $m^2 = 54,1$ $\tau = 0,7750$ $\tau_{0,05/20} = 0,6498$ $\tau = 0,7750 > 0,6498 = \tau$
2	78	+2	4	+9,1	82,81	
3	71	-7	49	+2,1	4,41	
4	62	-9	81	-6,9	47,61	
5	68	+6	36	-0,9	0,81	
6	82	+14	196	+13,1	176,61	
7	74	-8	64	+5,1	26,01	
8	60	-6	36	-8,9	79,21	
9	72	+12	144	+3,1	9,61	
10	64	-8	64	-4,9	24,01	
11	81	+17	289	+12,1	146,41	
12	68	-13	169	-0,9	0,81	
13	71	+3	9	+2,1	4,41	
14	58	-13	169	-10,9	118,81	
15	66	+8	64	-2,9	8,41	
16	59	-7	49	-9,9	98,01	
17	64	+5	25	-4,9	24,01	
18	60	-4	16	-8,9	79,21	
19	68	+8	64	-0,9	0,81	
20	76	+8	64	+7,1	50,41	
$\Sigma$	1378	+8	1592	0,0	1027,80	

**Tabela 2.** Obliczenia wyników pomiarów T2002 Wilda

$i$	$x_i$ g c cc	$d_i = x_{i+1} - x_i$ cc	$d_i^2$	$v_i = x_i - \bar{x}$	$v_i^2$	Obliczenia
1	102 13 46			-5	25	$\bar{x} = 102^g 13^c 51^{cc}$ $\sum_i d_i^2 = 1131$ $m_d^2 = 29,8$ $\sum_i v_i^2 = 690$ $m^2 = 36,3$ $\tau = 0,821$ $\tau_{0,05/20} = 0,6498$ $\tau = 0,821 > 0,6498 = \tau_q$
2	48	+2	4	-3	9	
3	53	+5	25	+2	4	
4	41	-8	64	-10	100	
5	60	+19	361	+9	81	
6	44	-16	256	-7	49	
7	50	+6	36	-1	1	
8	48	-2	4	-3	9	
9	43	-5	25	-8	64	
10	43	0	0	-8	64	
11	52	+9	81	+1	1	
12	54	+2	4	+3	9	
13	61	+7	49	+10	100	
14	55	-6	36	+4	16	
15	56	+1	1	+5	25	
16	60	+4	16	+9	81	
17	52	-8	64	+1	1	
18	46	-6	36	-5	25	
19	52	+6	36	+1	1	
20	56	+4	16	+5	24	
$\Sigma$	1020	+14	1131	0,0	690	

W obu przypadkach, a więc i dla Theo 010 i dla T2002 Wilda można stwierdzić brak występowania błędów systematycznych w pomiarach, co pozwala wnioskować o przydatności badanego sprzętu do wykonywania pomiarów geodezyjnych.

Aby upewnić się, że rozkłady błędów empirycznych ww. teodolitami są zgodne z rozkładem normalnym – co potwierdziłoby wnioski z testu Abbe'go – pomiary wykonane badanym sprzętem poddano testowaniu metodą Shapiro-Wilka.

### PODSTAWY TEORETYCZNE TESTU SHAPIRO-WILKA

W teście tym, jako statystykę testową  $W$  Shapiro-Wilka dla weryfikacji hipotezy o normalności rozkładu błędów pomiarowych – przyjmuje się zmienną losową:

$$W = \frac{\left( \sum_i a_i(n) \cdot (X_{n-i+1} - X_i) \right)^2}{\sum_j (X_j - \bar{X})^2}; \quad (5)$$

gdzie:  $X_j$  – wartości elementów próbki,  
 $a_i(n)$  – stałe zależne od liczebności próbki oraz od wartości  $i$  (zestawione w tablicach Shapiro-Wilka).

Jeżeli wartość  $W_d$  statystyki  $W$  leży poza przedziałem  $\left\langle W\left(\frac{1}{2}\alpha; n\right); W\left(1 - \frac{1}{2}\alpha; n\right) \right\rangle$ , hipotezę o normalności rozkładu odrzuca się na poziomie istotności  $\alpha$ .

Wówczas można badać, czy rozkład empiryczny różni się od rozkładu normalnego współczynnikiem asymetrii  $S$  lub spłaszczenia  $e$ , określonych wzorami:

$$S = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^3}{\sum_i x_i^3} \quad (6)$$

$$e = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^4}{\sum_i x_i^4} \quad (7)$$

W przypadku, gdy statystyka  $W_d$ , należy do opisanego wyżej przedziału – brak podstaw do odrzucenia badanej hipotezy, stąd wniosek o normalności rozkładu błędów, czyli o poprawności działania badanego sprzętu lub metody pomiarowej.

Obliczenia do testu Shapiro-Wilka podane są:

1. dla teodolitu optycznego Theo 010 Zeissa – w tabeli 3,
2. dla teodolitu elektronicznego T2002 Wilda – w tabeli 4.

**Tabela 3.** Test Shapiro-Wilka dla Theo 010 Zeissa

Nr	$X_{n-i+1}-X_i$	$a_i(n)$	$a_i(n) \cdot X_{n-i+1}-X_i$
1	24	0,5251	12,6024
2	22	0,3318	7,2996
3	18	0,2460	4,4280
4	14	0,1802	2,5228
5	10	0,1240	1,2400
6	6	0,0727	0,4362
7	3	0,0240	0,0720
			$\Sigma 28,6010$

$$(28,6010)^2 = 818,0172$$

$$\sum_1^n (X_j - \bar{X})^2 = 1027,8000$$

$$W_d = \frac{818,0172}{1027,8000} = 0,7959$$

Z tablic Shapiro-Wilka, dla  $\alpha = 0,05$  odczytujemy: 1)  $W\left(\frac{1}{2}\alpha; n\right) = 0,760$

oraz 2)  $W\left(1 - \frac{1}{2}\alpha; n\right) = 0,985$

Statystyka  $W_d = 0,7959$  należy do przedziału  $\langle 0,760; 0,985 \rangle$ .

**Tabela 4.** Test Shapiro-Wilka dla T2002 Wilda

Nr	$X_{n-i+1}-X_i$	$a_i(n)$	$a_i(n) \cdot X_{n-i+1}-X_i$
1	20	0,5359	10,7180
2	18	0,3325	5,9850
3	16	0,2412	3,8592
4	9	0,1707	1,5363
5	6	0,1099	0,6594
6	3	0,0539	0,1617
			$\Sigma 22,9196$

$$(22,9196)^2 = 525,3081$$

$$\sum_1^n (X_j - \bar{X})^2 = 690,0000$$

$$W_d = \frac{525,3081}{690,0000} = 0,7613$$

Z tablic Shapiro-Wilka, dla  $\alpha = 0,05$  odczytujemy : 1)  $W\left(\frac{1}{2}\alpha ; n\right) = 0,760$

oraz 2)  $W\left(1 - \frac{1}{2}\alpha ; n\right) = 0,985$

Statystyka  $W_d = 0,7613$  należy do przedziału  $\langle 0,760 ; 0,985 \rangle$ .

### WNIOSKI

Z przeprowadzonych badań mających na celu ocenę uzyskanych wyników pomiaru za pomocą testów statystycznych można sformułować następujące wnioski:

1. Z testu Abbe`go dla The010 Zeissa: statystyka  $\tau > \tau_q$ , świadczy to o braku występowania błędów systematycznych w pomiarach wykonywanych tym teodolitem.
2. Z testu Abbe`go dla T2002 Wilda: jak wyżej.
3. Z testu Shapiro-Wilka dla The010 Zeissa: ponieważ statystyka  $W_d$  statystyki  $W$  należy do przedziału  $\left\langle W\left(\frac{1}{2}\alpha ; n\right) ; W\left(1 - \frac{1}{2}\alpha ; n\right) \right\rangle$ , świadczy to o normalności rozkładu błędów pomiarów wykonywanych tym teodolitem.
4. Z testu Shapiro-Wilka dla T2002 Wilda: jak wyżej.
5. Z przeprowadzonych badań wynika wniosek ogólny, że obydwa instrumenty spełniają warunki obu testów statystycznych, a więc nadają się do wykonywania pomiarów geodezyjnych.

Wykonane badania w niniejszej pracy mające na celu ocenę przydatności teodolitów precyzyjnych do prac inżynierskich za pomocą testów matematycznych stanowią przyczynek do wypracowania metodologii badań doświadczalnych w geodezji inżynierskiej.



## BIBLIOGRAFIA

- Greń J. *Modele i zadania statystyki matematycznej*. PWN, Warszawa 1970.
- Kamiński W. *Wybrane sposoby wykrywania obserwacji geodezyjnych obciążonych błędami grubymi*. Przegląd Geodezyjny Nr 4, Warszawa 2002.
- Krupiński W. *Sposoby badania zgodności rozkładów błędów niektórych pomiarów geodezyjnych z rozkładami teoretycznymi*. Zesz. Nauk. AR w Krakowie, ser. Geodezja, 3, 83, 1973.
- Krysicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska., Wasilewski M. *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*. Cz. II Statystyka matematyczna. PWN Warszawa 1986.
- Lizończyk M. *Nominalna dokładność instrumentów pomiarowych a ich dokładność użytkowa, rozważania związane z lekturą normy PN/ISO 8322*. Przegląd Geodezyjny Nr 3, Warszawa 2000.
- Pawłowski W. *Procedury ustalania dokładności użytkowej instrumentów pomiarowych według nowej Polskiej Normy PN/ISO 8322*. Przegląd Geodezyjny Nr 2. Warszawa 1997.
- Piasek. Z. *Wybrane przykłady zastosowań matematycznego opisu powierzchni Ziemi*. Czasopismo Techniczne 3B/1995. PWN, Kraków–Warszawa 1995.

Dr inż. Klemens Godek  
Dr hab. inż. Waldemar Krupiński  
Katedra Geodezji, Uniwersytet Rolniczy w Krakowie  
ul. Balicka 253 a, 30-198 Kraków  
telefon: (12) 662 45 40, (12) 662 45 12  
e-mail: rmgodek@cyf-kr.edu.pl

Recenzent: *Prof. dr hab. Zbigniew Piasek*