

*Petro Dvulit, Kornilyi Tretjak*

**O DOKŁADNOŚCI INTERPOLACJI  
WYSOKOŚCI GEOIDY (*QUASI*-GEOIDY)  
Z WYKORZYSTANIEM NOWOCZESNYCH MODELI  
GЕОPOTENCJAŁU**

---

***ABOUT EXACTNESS OF INTERPOLATION OF HEIGHTS  
OF GEOID (*QUASIGEOID*) WITH THE USE OF MODERN  
MODELS OF GEOPOTENTIAL***

**Streszczenie**

W referacie omówione zostały różne współczesne modele pola grawitacyjnego Ziemi dla wyznaczenia dokładności interpolacji wysokości geoidy / *quasi*-geoidy dla obszaru Ukrainy. W tym celu przeprowadzono porównanie modelu geoidy i pola grawitacyjnego Ziemi dla danych niwelacji satelitarnej 44 punktów 1 i 2 klasy sieci geodezyjny Ukrainy.

Wyniki badań pokazały, że model EGMO8 jest najdokładniejszym modelem ze wszystkich istniejących modeli geopotencjału dla obszaru Ukrainy. Dokładne wysokości *quasi*-geoidy charakteryzuje się na poziomie  $\pm 10$  cm.

**Słowa kluczowe:** wysokość geoidy / *quasi*-geoidy, modeli geopotencjału, modeli pola grawitacyjnego Ziemi, interpolacja

***Summary***

*In the given article the different modern models of the gravity field of Earth for determination of exactness of interpolation of height of geoid / quasigeoid for space on the territory of Ukraine are examined. With that purpose the comparison of model of geoid and gravity field of Earth for information satellite leveling of 44 points 1 and to 2 classes of geodesic network of Ukraine are executed.*

*The results of researches rotined that a model EGMO8 is the most perfect than all existent models of geopotential for territory of Ukraine. Exactness of height of quasigeoid is characterized at the level of  $\pm 10$  sm.*

**Key words:** heights of geoid / quasigeoid, models of geopotential, models of the gravity field of Earth, interpolation

## WSTĘP

Ważnym kierunkiem w geodezji jest opracowanie modeli pola grawitacyjnego Ziemi o wysokiej dokładności oraz odpowiedniego stworzenia szczegółowych cyfrowych modeli wysokości *quasi*-geoidy o wysokiej rozdzielczości, co musi odpowiadać dokładności określenia normalnych wysokości punktów geodezyjnych i sieci niwelacji.

Istotnym (znaczącym) wkładem w sprawę zjednoczenia narodowych systemów wysokościowych jest utworzenie Europejskiej pionowej sieci GPS (EUVN) w celu określenia geoidy Europejskiej i przygotowania do stworzenia Europejskiej pionowej sieci kinematycznej. Wyraźnie rozwój tych kierunków wymaga uzupełnienia banku naziemnych danych grawimetrycznych, jak również otrzymania nowoczesnych modeli geoidy / *quasi*-geoidy i pola grawitacyjnego Ziemi z dokładnością mierzoną w cm [Wołczko i in. 2000; Dwulit 2008; Marczenko i in. 2007].

Wiadomo, że istnieją dwa podejścia do obliczania modelu *quasi*-geoidy. W pierwszym wykorzystują dane grawimetryczne oraz całkę Stokesa, a w drugim – modele geopotencjału.

Pierwszy model geopotencjałny rzędu  $n = 8$ , określane przez naziemne dane grawimetryczne, był opracowany przez Żongolowicza w 1956 roku [Dwulit 2008]. Drugi model został określony na podstawie danych satelitarnych w 1966 r. w Instytucie Smitstońskim. Te modele stwarzały możliwość obliczenia wysokości *quasi*-geoidy z dokładnością  $\pm 10$  m. Ale od tego czasu zaistniał znaczny postęp w zakresie dokładności modeli geopotencjału. Od 1978 zostały stworzone i opublikowane liczne różne modele pola grawitacyjnego do stopnia i porządku 180, 360 i wyżej. Model EGM 96 porządku  $n = 360$  odnosi się do pola grawitacyjnego według średniego obszaru o kształcie trapezu  $30'$  i charakteryzuje się dokładnością  $\pm 19$ – $53$  cm. *Model Eigen – CG0C* została skonstruowana na podstawie satelitarnych danych grawimetrycznych z misji CHAMP i GRACE, jak również naziemnych danych grawimetrycznych i altymetrycznych. Porządek rozwinięcia sferycznych współczynników harmonicznych tego modelu wynosi 360, czyli rozdzielczość modelu dorównuje 100 km. Z tego modelu można otrzymać geoidę globalną i wolnopowietrzne anomalie grawitacyjne. W 1997 r. została zbudowana Europejska *quasi*-geoida grawimetryczna EGG97 IAC w centrum komputerowym. EGG. Model EGG 97 był utworzony w kształcie sieci  $10' \times 15'$  i obejmował obszar od  $25^\circ$  do  $77^\circ$  szerokości i  $35^\circ$  do  $67,4^\circ$

długości geograficznej z liczbą punktów sieci około 12 800 000. Wysokość *quasi*-geoidy określa się z błędem 1–5 cm na 10 km, 1–2 cm na 100 km, i 5–20 cm na 1000 km.

W 2008 r. został opublikowany model EGM 08 stopnia  $n = 2190$ . Podczas budowania tego modelu wykorzystano następujące dane: naziemne dane anomalii siły ciężkości, astronomiczno-geodezyjne odchylenia pionu, altymetryczne dane z TOPEX, grawimetryczne dane satelitarne z misji GRACE, wysokości z GPS-niwelacji, model oceanów ECCO. Współczynniki modelu prezentowane są w dwóch wersjach: z uwzględnieniem tzw. zerowego modelu przyływów i zwolnionego od wszystkich przyływów. W tym celu załączony został dodatkowy program komputerowy, który umożliwia obliczenie wysokości *quasi*-geoidy i innych pochodnych pola grawitacyjnego. Ale dla wykorzystania tego programu autorzy modelu dla całej kuli ziemskiej obliczyli wysokości *quasi*-geoidy w węzłach siatki geograficznej 1' x 1' i 2,5' x 2,5' z załączeniem odpowiednich programów interpolacji. Oprócz tego, program pozwala na wyodrębnienie z sieci globalnej danych dotyczących danego regionu.

#### METODYKA BADAŃ I WYNIKI PRZEPROWADZONYCH ANALIZ

Podstawowym celem badań jest próba poszukiwania poprzednich modeli geoidy / *quasi*-geoidy i 0 pola grawitacyjnego Ziemi, według których można wywnioskować dokładność obliczania wysokości *quasi*-geoidy na terytorium Ukrainy. Cel ten osiąga się poprzez porównanie różnych modeli i danych niwelacji 44 punktów 1 i 2 klasy Państwowej sieci geodezyjnej Ukrainy. W celu sprawdzenia dokładności wysokości na terytorium Ukrainy zostały wykorzystane następujące modele geoidy / *quasi*-geoidy i grawitacyjnego pola Ziemi: EGM 96, EIGEN-CG01C, EGG97 i EGM 08 i dokonano ich porównania z podobnymi wysokościami *quasi*-geoidy, uzyskanymi poprzez GPS – niwelację. Zauważmy, że dla tych punktów sieci geodezyjnej obliczone zostały wysokości *quasi*-geoidy dla wszystkich wymienionych modeli. W przypadku modelu EGM 08 zostały obliczone wysokości *quasi*-geoidy z wykorzystaniem współczynników geopotencjału i interpolowanych wysokości *quasi*-geoidy zgodnie z wyżej wymienionym programem komputerowym. Następnie zostały obliczone różnice między wartościami wysokości *quasi*-geoidy według modeli i wartościami wysokości *quasi*-geoidy według GPS – niwelacji, jak również statystycznych danych wymienionych różnic. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabelach 1–6.

**Tabela 1.** Różnice między wartościami wysokości quasi-geoidy modeli i według GPS – niwelacji

**Table 1.** Difference between the values of height of quasigeoid and in relation to GPS – leveling

| № punktów | $\zeta_{\text{gps/niw}} - \zeta_{\text{EGM08}}$<br>obliczony, cm | $\zeta_{\text{gps/niw}} - \zeta_{\text{EGM08}}$<br>węzłach siatki, cm | $\zeta_{\text{gps/niw}} - \zeta_{\text{EGM96}}$ , cm | $\zeta_{\text{gps/niw}} - \zeta_{\text{EIGENCGO1C}}$ , cm | $\zeta_{\text{gps/niw}} - \zeta_{\text{EGG97}}$ ,<br>cm |
|-----------|--|---|--|---|---|
| 1         | -6,8   | -6,7  | -71,7  | -23,8   | -26,6   |
| 2         | 3,4  | 2,1   | -343,5   | 10,0  | -23,8   |
| 3         | 2,3  | 2,1   | 6,1  | 6,5   | -0,2  |
| 4         | 9,6  | 8,9   | 21,5   | 22,8  | -1,4  |
| 5         | 21,4   | 21,5  | -61,4  | 19,8  | -55,5   |
| 6         | 2,5  | 2,8   | -46,4  | -23,1   | 11,4  |
| 7         | 3,1  | 1,3   | 12,1   | 2,2   | -13,6   |
| 8         | 9,5  | 9,0   | 41,6   | -2,8  | 1,6   |
| 9         | 17,9   | 16,2  | 40,6   | 1,6   | 3,4   |
| 10        | -0,3   | -0,9  | 5,8  | -4,4  | -14,7   |
| 11        | -9,1   | -10,6   | -79,1  | -41,5   | -1,6  |
| 12        | -8,0   | -7,9  | -65,7  | -26,1   | 6,2   |
| 13        | 7,6  | 6,4   | -41,2  | -25,9   | 1,9   |
| 14        | -2,5   | -1,8  | -0,8   | 4,7   | -2,4  |
| 15        | 7,4  | 8,0   | -12,8  | 27,9  | -15,5   |
| 16        | 4,1  | 4,1   | 45,3   | 18,2  | -9,0  |
| 17        | -8,4   | -9,7  | -34,7  | -59,9   | -35,1   |
| 18        | -8,4   | -8,8  | -44,7  | -20,8   | -24,0   |
| 19        | 9,6  | 10,3  | -80,9  | -25,9   | -19,3   |
| 20        | 2,3  | 0,8   | -64,2  | -7,0  | -17,4   |
| 21        | 0,7  | 1,6   | 1,2  | 16,5  | -10,9   |
| 22        | 0,2  | -0,1  | -5,8   | 14,5  | -10,0   |
| 23        | 6,3  | 5,0   | -86,2  | -30,1   | -26,8   |
| 24        | 0,1  | -0,4  | 0,4  | -0,4  | -6,7  |
| 25        | -0,3   | 0,1   | 8,9  | 6,4   | -13,5   |
| 26        | -3,7   | -3,5  | 2,7  | 19,0  | -18,9   |
| 27        | -2,3   | -2,5  | -36,9  | 27,1  | -13,7   |
| 28        | 0,0  | -0,4  | -28,4  | 38,0  | -14,3   |
| 29        | -3,8   | -4,8  | -51,9  | -5,8  | -26,3   |
| 30        | -1,2   | -2,9  | -42,9  | -14,3   | -31,5   |
| 31        | -2,1   | -0,4  | -64,7  | -21,1   | 3,5   |
| 32        | 0,8  | -7,0  | -40,0  | -4,9  | -4,5  |
| 33        | 5,4  | 4,9   | -15,2  | 9,0   | -4,1  |
| 34        | 6,1  | 7,0   | 27,4   | 30,0  | 11,2  |
| 35        | 19,2   | 20,6  | -61,3  | 16,7  | -64,2   |
| 36        | 22,6   | 23,9  | -62,9  | 8,2   | -35,7   |
| 37        | 20,1   | 19,6  | -81,5  | 8,7   | -48,1   |
| 38        | 18,4   | 19,4  | -55,7  | 27,7  | -13,5   |
| 39        | 20,1   | 18,3  | -70,9  | 15,2  | -52,7   |
| 40        | 15,7   | 14,5  | -74,8  | 12,9  | 8,3   |
| 41        | 21,0   | 22,2  | -77,3  | 13,9  | -22,1   |
| 42        | 3,8  | 12,3  | 7,5  | 81,8  | 88,7  |
| 43        | -2,7   | -1,4  | -32,4  | -16,3   | -27,3   |
| 44        | -6,1   | -5,8  | 33,6   | 20,2  | -9,6  |

**Tabela 2.** Statystyczne charakterystyki odchyłek  $\zeta^{\text{gps/niw}} - \zeta^{\text{EGM08}}$  w węzłach siatki, cm  
**Table 2.** Statistical description of rejections  $\zeta^{\text{gps/niw}} - \zeta^{\text{EGM08}}$  in the knots of net, sm

|              |        |
|--------------|--------|
| Min.         | - 10,6 |
| Maks.        | 23,9   |
| Średnia      | 4,220  |
| Odch. Stand. | 9,431  |

**Tabela 3.** Statystyczne charakterystyki odchyłek  $\zeta^{\text{gps/niw}} - \zeta^{\text{EGM08}}$  obliczony, cm  
**Table 3.** Statistical description of rejections  $\zeta^{\text{gps/niw}} - \zeta^{\text{EGM08}}$  calculated, sm

|              |       |
|--------------|-------|
| Min.         | -9,1  |
| Maks.        | 22,6  |
| Średnia      | 4,413 |
| Odch. Stand. | 9,062 |

**Tabela 4.** Statystyczne charakterystyki odchyłek  $\zeta^{\text{gps/niw}} - \zeta^{\text{EGM96}}$ , cm  
**Table 4.** Statistical description of rejections  $\zeta^{\text{gps/niw}} - \zeta^{\text{EGM96}}$ , sm

|              |         |
|--------------|---------|
| Min.         | -86,2   |
| Maks.        | 45,3    |
| Średnia      | -29,640 |
| Odch. Stand. | 38,80   |

**Tabela 5.** Statystyczne charakterystyki odchyłek  $\zeta^{\text{gps/niw}} - \zeta^{\text{EIGENCGO1C}}$ , cm  
**Table 5.** Statistical description of rejections  $\zeta^{\text{gps/niw}} - \zeta^{\text{EIGENCGO1C}}$ , sm

|              |        |
|--------------|--------|
| Min.         | -59,9  |
| Maks.        | 81,8   |
| Średnia      | 2,440  |
| Odch. Stand. | 24,270 |

**Tabela 6.** Statystyczne charakterystyki odchyłek  $\zeta^{\text{gps/niw}} - \zeta^{\text{EGG97}}$ , cm  
**Table 6.** Statistical description of rejections  $\zeta^{\text{gps/niw}} - \zeta^{\text{EGG97}}$ , sm

|              |         |
|--------------|---------|
| Min.         | -64,2   |
| Maks.        | 88,7    |
| Średnia      | -13,040 |
| Odch. Stand. | 23,300  |

Dokładność budowy geoidy / *quasi*-geoidy dla punktów na terytorium Polski [Lyszkowicz 2009; Krynski 2007; Paszus i in. 2001], obliczona według modelu EGM 08, charakteryzuje się poziomem niższym niż 2 cm, i można ją porównać z wynikiem grawimetrycznym. Niezgodność między wysokościami geodezyjnymi, normalnymi oraz wysokościami *quasi*-geoidy z wynikami modelu EGM 08 wynosi około 15 cm.

## PODSUMOWANIE

Wyniki wykonanych badań dla wybranych punktów terytorium Ukrainy i Polski wykazały, że model EGM 08 jest najlepszy z rozpatrywanych modeli geopotencjału. Dokładność wysokości quasi-geoidy można określić w granicach 2-10 cm. W sposób oczywisty potwierdza to wyniki badań [Wołczko i in. 2005; Dwulit, Holubinka 2005, 2008; Marczenko i in. 2007] i można oczekiwać, że otrzyma się taką samą dokładność w krajach Europy, USA i Kanadzie, gdzie istnieje wystarczająca ilość naziemnych pomiarów grawimetrycznych. Dalsze badania powinny być ukierunkowane na opracowanie nowych modeli geopotencjału i *quasi*-geoidy z dokładnością rzędu centymetrów.

## BIBLIOGRAFIA

- Dwulit P. D., Holubinka Y. *Doświadczenie określenia wysokości quasi-geoidy metodą kombinowaną*. Współczesne osiągnięcia nauki i przemysłu geodezyjnego. Collected Works. Lwów 2008, s. 49–54.
- Dwulit P.D. *Geodezja fizyczna*. 2008, s. 256.
- Dwulit P.D. Holubinka Y. *Określenie kształtów quasi-geoidy przy użyciu wzoru Neumanna-Kocha*. Współczesne osiągnięcia nauki i przemysłu geodezyjnego: Collected Essays. Lwów 2005, s. 54–59.
- Krynski J. *Precyzyjne modelowanie quasi-geoidu na obszarze Polski – wyniki i ocena dokładności*. IGIK Seria monograficzna №13, 2007, 10
- Lyszkowicz A. EGM 08 globalna supergeoida. *Geodeta*^ magazyn geoinformacyjny. 2009, № 6, s. 12–14.
- Marczenko O., Kuczer O.W., Renkewicz O.W. *Wyniki budowania quasi-geoidy dla regionu Ukrainy (UKH 2006)*. Biuletyn Geodezja i Kartografia. Kijów 2007, № 2, s. 7–13.
- Paszus R., Osada E., Olejnik S. *Geoida niwelacyjna*. *Geodeta* – magazyn geoinformacyjny. № 5 (84), 2001, s.10–17.
- Wołczko P., Dwulit P., Sawczuk S. *Wysokości geoidy i składowe odchylenia pionu na terytorium Ukrainy według danych planetarnego modelu grawitacyjnego pola Ziemi EGM 96*. Współczesne osiągnięcia nauki i przemysłu geodezyjnego: Collected Works. Lions 2000, s. 53–55.

Prof. Dr hab. inż. Petro Dwulit,  
Prof. Dr hab. Inz. Kornylii Tretjak  
Wyższa Szkoła Inżynieryjno-Ekonomiczna z siedzibą w Rzeszowie  
Katedra Geodezji i Obrotu Nieruchomościami  
ul. Milocinska 40, 35-232 Rzeszów

Recenzent: *Prof. dr hab. inż. Krzysztof Gawroński*