POLSKA AKADEMIA NAUK – Oddział w Krakowie
KOMISJA TECHNICZNEJ INFRASTRUKTURY WSI

POLISH ACADEMY OF SCIENCES – Cracow Branch
COMMISSION OF TECHNICAL RURAL INFRASTRUCTURE

INFRASTRUKTURA I EKOLOGIA TERENÓW WIEJSKICH

4

INFRASTRUCTURE AND ECOLOGY OF RURAL AREAS

Andrzej Woźniak

GRAFY I SIECI W TECHNIKACH DECYZYJNYCH

GRAPH AND NETWORK ANALYSIS IN DECISION MAKING TECHNIQUES

Kraków 2010

RADA PROGRAMOWA – RESEARCH COUNCIL

Radomir Adamovský (*Praga*), Tadeusz Bednarczyk, Wacław Bieda, Jerzy Gruszczyński, Bent Hasholt (*Kopenhaga*), Dušan Húska (*Nitra*), Stanisław Krzanowski (*przewodniczący*), Antoni T. Miler, Jan Pawełek, Štefan Pogran *(Nitra*), Artur Radecki-Pawlik, Jerzy Ratomski, Stanisław Rolbiecki, Czesław Rycąbel, Janusz Lech Siemiński, Stefan Stojko (*Lwów*), Rastislava Stolična (*Bratysława*), Ryszard Ślizowski, Gerlind Weber (*Wiedeń*), Stanisław Węglarczyk, Andrzej Woźniak, Zdzisław Wójcicki

KOMITET REDAKCYJNY – EDITORIAL BOARD

Jerzy Gruszczyński *(red. nacz.)*, Jerzy Kwapisz *(z-ca. red. nacz.)*,
Anna Krakowiak-Bal *(sekretarz)*,
Stanisław Węglarczyk (*red. angielska*; sweglar@pk.edu.pl)

WYDAWCA – EDITOR

Komisja Technicznej Infrastruktury Wsi PAN w Krakowie

© Copyright by:
Komisja Technicznej Infrastruktury Wsi PAN, św. Jana 28, 31-018 Kraków

ADRES REDAKCJI – EDITORIAL OFFICE ADDRESS

Redakcja IiETW, Balicka 116 B Pawilon E, 30-149 Kraków,
tel. (12)(662) – 46 59, - 46 58, - 46 55, Fax: (12) 662 46 60,
E-mail: editor@infraeco.pl, www.infraeco.pl
Webmaster: Jakub Sikora (Jakub.Sikora@ur.krakow.pl), tel. 012-662 46 62

ISSN 1732-5587

Okładka: *Adam Chłobowski*
Korekta i adjustacja: *Krystyna Oliwa*

Druk, oprawa:
S.C. DRUKROL, AL. 29 Listopada 46, Kraków, tel. (12) 412 46 50

Publikacja dofinansowana przez Instytut Inżynierii Rolniczej i Informatyki
Uniwersytetu Rolniczego im. Hugona Kołłątaja w Krakowie

Recenzent: *Prof. dr hab. Wiktor Adamus*

SPIS TREŚCI

Wstęp 7
1. Wprowadzenie do teorii grafów 11
1.1. Podstawowe definicje i pojęcia teorii grafów 11
1.2. Macierzowa postać grafu 16
1.3. Drogi i cykle w grafach 17
1.3.1. Grafy eulerowskie i hamiltonowskie 18
1.3.2. Grafy drzewa i grafy zorientowane (sieci) 19
2. Technika harmonogramów 21
3. Metody sieciowe w zarządzaniu przedsięwzięciami 25
3.1. Grafy sieciowe – sieci zależności 25
3.2 Podstawowe elementy grafów sieciowych 26
3.3 Stopień uwzględnienie szczegółów w grafach sieciowych 28
3.4. Konstrukcja sieci zależności 29
4. Analiza sieci zależności 32
4.1. Analiza drogi krytycznej w sieciach deterministycznych (CPM) 33
4.2. Analiza stochastycznych sieci zależności (PERT) 42
5. Metoda planowania sieciowego MPM-METRA 47
5.1. Zasady metody MPM 47
5.2. Analiza grafu sieciowego MPM-METRA 52
6. Techniki optymalizacyjne na sieciach 60
6.1. Technika planowania zasobów oparta na metodzie CPM 60
6.2. Analiza przepływu w sieciach. Algorytm Forda-Fulkersona ... 64
6.2.1. Sformułowanie problemu dystrybucji w ograniczonej sieci transportowej 65
6.2.2. Algorytm i twierdzenie Forda-Fulkersona 72
6.2.3. Maksymalny przepływ w sieci jako narzędzie wspomagania decyzji logistycznych 73
6.3. Analiza czasowo-kosztowa 82
6.3.1. Zależność kosztów czynności od czasu wykonania 82
6.3.2. Analiza CPM-COST 86
6.3.3. Analiza czasowo-kosztowa w sieciach z wykorzystaniem programowania liniowego 92

6.3.3.1. Minimalizacja kosztów przy zadanym czasie dyrektywnym ... 92
6.3.3.2. Minimalizacja czasu przy zadanym koszcie ... 96
7. Modele sieciowe o stochastycznej strukturze logicznej ... 98
7.1. Technika GERT ... 98
7.1.1. Podstawowe założenia techniki GERT ... 98
7.1.2. Schemat techniki GERT ... 99
7.1.2.1. Opisanie przedsięwzięcia za pomocą sieci stochastycznej ... 100
7.1.2.2. Dane liczbowe charakteryzujące obciążenie poszczególnych łuków sieci ... 104
7.1.2.3. Redukowanie sieci stochastycznej ... 106
8. Minimalne drzewo rozpinające ... 118
9. Zagadnienie najkrótszej drogi w grafie ... 124
10. Drzewa decyzyjne ... 136
10.1. Struktura procesu decyzyjnego w warunkach niepełnej informacji ... 137
10.1.1. Jednoetapowe drzewo decyzyjne ... 143
10.1.2. Wieloetapowe drzewo decyzyjne ... 145
11. Modelowanie produkcji – drzewo produktu ... 151
11.1. Tworzenie listy materiałowej na podstawie grafu Gozinto ... 155
11.2. Konstrukcja drzewa produktu – graf Gozinto ... 159
11.3. Postępowanie algebraiczne Gozinto ... 162
12. Sztuczne sieci neuronowe ... 168
12.1. Geneza i biologiczne podstawy sztucznych sieci neuronowych ... 168
12.2. Modele neuronu ... 171
12.3. Budowa sieci neuronowych ... 172
12.4. Uczenie sieci neuronowych ... 176
12.4.1. Uczenie sieci neuronowych z nauczycielem ... 176
12.4.2. Uczenie sieci neuronowych bez nauczyciela ... 182
Bibliografia ... 184
Streszczenie ... 186

CONTENTS

1. Introduction to graph theory 11
   1.1. Basic concepts and definitions of graph theory 11
   1.2. Matrix graph representation 16
   1.3. Paths and cycles in graph networks 17
      1.3.1 Euler and Hamilton graphs 18
      1.3.2. Decision trees and directed graphs (networks) 19
2. Schedule techniques 21
3. Network methods in project management 25
   3.1. Directed graphs and network analysis 25
   3.2. Basic modules in directed network analysis 26
   3.3. Detail levels factor in network analysis 28
   3.4. Dependency network construction 29
4. Dependency network analysis methods 32
   4.1. Critical path analysis of determined networks 33
   4.2. Analysis of stochastic networks (PERT) 42
5. Scheduling network method MPM-METRA 47
   5.1. The rules of MPM 47
   5.2. MPM-Metra – analysis 52
6. Optimization techniques in network analysis 60
   6.1. Technique of resource planning based on CPM method 60
   6.2. Flow in network analysis. Ford-Fulkerson algorithm 64
      6.2.1. Problems of distribution in limited transport network 65
      6.2.2. Ford-Fulkerson algorithm and method 72
      6.2.3. Maximum flow in network analysis as a supporting tool of logistic decision making process 73
   6.3. Time-cost analysis 82
      6.3.1. Dependence of cost activity on realization time 82
      6.3.2. CPM-COST analysis 86
      6.3.3. Time-cost network analysis using linear programming method 92
         6.3.3.1. Cost minimization under instruction time 92
         6.3.3.2. Time minimization under instruction cost 96

7. Network analysis models with stochastic structure 98
7.1. GERT technique 98
7.1.1. Basis assumptions of GERT method 98
7.1.2. Diagram of GERT technique 99
7.1.2.1. Project presentation in stochastic network 100
7.1.2.2. Numerical data characterizing individual network arcs weighing 104
7.1.2.3. Stochastic network reduction 106
8. Minimum tacking trees problem 118
9. The shorter path in a network 124
10. Decision trees 136
10.1. Decision trees structure under uncertain information circumstances 137
10.1.1. Single-phase decision tree 143
10.1.2. Multiphase decision tree 145
11. Mathematical modeling of production 151
11.1. Material list construction (based on a graph) 155
11.2. Construction of product tree – Gozinto graph 159
11.3. Computational techniques of Gozinto graph 162
12. Artificial neural networks 168
12.1. Genesis and biological bases of artificial neural networks 168
12.2. Neuron models 171
12.3. Construction of artificial neural networks 172
12.4. Teaching of artificial neural networks 176
12.4.1. Teaching of artificial neural networks with teacher 176
12.4.2. Teaching of artificial neural networks without teacher 182
Bibliography 184
Summary 188

WSTĘP

Zapewnienie sukcesu przedsiębiorstwu poprzez podejmowania racjonalnych decyzji, w ustawicznie zmieniających się warunkach działania stawia wysokie wymagania osobom odpowiedzialnym za zarządzanie. Proces zarządzania, bez względu na jego przedmiot nierozłącznie związany jest z procesem podejmowania decyzji, a w skutecznym zarządzaniu podjęte decyzje muszą być optymalne.

W historycznym procesie tworzenia się nauki o zarządzaniu i kierowaniu, wyodrębniane są trzy zasadnicze szkoły rozwoju tej dyscypliny skoncentrowane na przedmiotowo rozłożonych kierunkach aktywności menedżerów. Każda z nich w swoim zamierzeniu ma doprowadzić do większej sprawności organizacji. Jednym z takich kierunków jest szkoła klasyczna zarządzania, podzielona na dwie subkategorie: naukową organizację pracy i ogólną teorię administracji. Teoretycy naukowej organizacji pracy zajmowali się zagadnieniem podnoszenia wydajności pracowników wykonawczych, natomiast teoretycy administracji zajmowali się całą organizacją i sposobami zwiększenia jej skuteczności. Inni teoretycy koncentrują swoją uwagę na osiąganiu celów organizacji przez pracę z ludźmi, koncentrując się na zasobach ludzkich organizacji, na motywacji i przywództwie (szkoła behawioralna). Trzecim wreszcie kierunkiem w zarządzaniu jest kierunek ilościowy zwany czasami ilościową teorią zarządzania. Kierunek ten wywodzi się z matematycznych i statystycznych metod rozwiązywania problemów decyzyjnych. Teoretycy tego kierunku wyrażają pogląd, że podjęcie optymalnej decyzji uwarunkowane jest dobrym opisaniem problemu decyzyjnego w postaci modelu (np. matematycznego lub graficznego) i rozwiązanie go w sposób matematyczny w jakimś zalgorytmizowany postępowaniu. Dziedzinami wiedzy wspomagającymi proces podejmowania optymalnych decyzji, według szkoły ilościowej, są badania operacyjne, programowanie matematyczne lub teoria systemów.

Grafy i sieci jako narzędzia wspomagania decyzji są graficznym modelem odzwierciedlającym problem decyzyjny z jego strukturą, dający się sformułować ilościowo i umożliwiający uzyskanie dokładnego matematycznego rozwiązania w postaci precyzyjnej oceny. Dziedzina wiedzy oparta na teorii grafów i sieci stanowi znaczący rozdział badań operacyjnych. Zakres tematyczny podręcznika ogranicza się do tej części badań operacyjnych oraz technik decyzyjnych, w procesie których wykorzystywane są wszelkiego rodzaju graficzne ilustracje problemów decyzyjnych w postaci grafów, sieci i drzew.

Używane często w podręczniku pojęcia, takie jak techniki i metody decyzyjne, czy metody i techniki organizatorskie są pojęciami nie wymagającymi definiowania. W języku potocznym na ogół nie mamy problemów z wyczuciem intencji mówiącego, który wymiennie używa tych pojęć. Jednakże, gdy chodzi o identyfikację i praktyczne zastosowanie konkretnych metod lub technik podejmowania decyzji traktowanie tych pojęć jako synonimów może prowadzić do niejednoznaczności. Należy zatem je zdefiniować, by ich precyzyjnie używać i być jednoznacznie rozumianym.

Decydowanie oznacza w praktyce korzystanie z różnych metod i technik – często mówi się o metodach i technikach decyzyjnych. Dlatego więc terminami, które wymagają wyjaśnienia, są przede wszystkim terminy; technika i metoda. Jest to konieczne tym bardziej, że terminy technika i metoda mają na ogół znaczenie zbliżone i często używa się ich zamiennie. Częste użycie słowa technika może nasuwać mimo woli skojarzenia z techniką w znaczeniu działalności technicznej. Przez technikę w tym sensie można rozumieć np. procesy wytwarzania wyrobów lub posługiwania się urządzeniami (eksploatacja). Można też nazywać techniką rezultat działalności technicznej, a więc rzeczy wytworzonych w toku tej działalności. Takie jednak rozumienie techniki nie odpowiada przedmiotowi i stawianym w podręczniku celom. Powiedzmy zatem wyraźnie, że chodzi tu o technikę w znaczeniu sposobu działania.

Możemy przyjąć, że każde celowe działanie ludzkie, a więc także każda działalność techniczna, czy gospodarcza ma swoją technikę. Mówimy więc z jednej strony np. o technice produkcji maszyn, technice rolniczej (agrotechnice, zootechnice) itp., że mamy tu do czynienia z technicznym zastosowaniem słowa technika, z drugiej jednak strony mówimy o technice badania naukowego, technice zapamiętywania (mnemotechnice), technice gry itp. i w takich przypadkach możemy mówić o nietechnicznym, czy pozatechnicznym zastosowaniem słowa technika. Ponieważ działalność techniczna lub gospodarcza polega na posługiwaniu się materialnymi zasobami do realizacji materialnych celów, w literaturze spotyka się dla jej wyodrębnienia i scharakteryzowania termin technika materialna [Lange, Ekonomia polityczna, t. 1, 1969].

Przyjęte tu rozumienie techniki jako sposobu jakiegoś działania ma swoje uzasadnienie w etymologii tego terminu. Otóż słowo technika wywodzi się z greckiego *techne*, czyli sztuka. Jednakże *techne* i jej łaciński przekład *ars* znaczyły niezupełnie to samo, co dziś znaczy sztuka. Greckie *techne* i rzymskie *ars* znaczyły tyle co umiejętności. Mówimy dzisiaj o sztuce lekarskiej, sztuce architektonicznej, czy malarskiej, a także o sztuce zarządzania czy decydowania.

Ujęcie techniki jako sposobu działania wyjaśnia, dlaczego uważa się, że termin technika jest bliski znaczeniowo, czy nawet równoznaczny terminowi metoda. Możemy więc przyjąć, że i technika (w wyróżnionym typie znaczeniowym) i metoda jest określonym sposobem działania.

Nie każdy jednak sposób działania zasługuje na miano techniki czy metody. Zgodnie z dość powszechnie przyjętym poglądem należy wyróżnić spośród sposobów te, które są systematycznie stosowane, i tylko tym można przypisać walor techniki czy metody. Przy czym rozumienie systematyczności stosowania pewnego sposobu nie musi zakładać konieczności jego wielokrotnego stosowania. Wystarczy bowiem świadomość możliwości skutecznego użycia go w innych okolicznościach[1].

Można zatem przyjąć za Zieleniewskim[2], że „metoda to sposób stosowany z niejaką świadomością możliwości i skuteczności jego użycia w danym przypadku".

Definicja ta uwzględnia w pojęciu metody element skuteczności działania, tylko bowiem te sposoby mogą być stosowane systematycznie lub nadawać się do wielokrotnego wykorzystania, które prowadzą do zamierzonego celu – w rezultacie technika czy metoda to taki sposób działania, który jest skuteczny. Przyjmując, że sprawność i skuteczność jest uwarunkowana racjonalnością działania, można przyjąć, że technika czy metoda to racjonalny sposób działania, a więc sposób oparty na należycie uzasadnionej wiedzy. Wiedzą taką jest przede wszystkim wiedza naukowa, co nie oznacza jednak, że w pewnych okolicznościach, przy braku specjalistycznej wiedzy naukowej, podstawą skutecznego działania może być również wiedza praktyczna czy intuicja.

Warto na koniec przyjąć, który ze sposobów systematycznie stosowanych będziemy bardziej skłonni nazywać metodą, a który techniką. Propozycja sformułowana przez J. Supernata[3] zakłada, że o tym, czy mam do czynienia z techniką czy z metodą, przesądza stopień szczegółowości opisania danego sposobu działania, „…przy czym techniki działań to, w porównaniu z metodami, sposoby opisane bardziej szczegółowo, zrutynizowane, dające się ująć w ścisły program (algorytm, procedurę) czyli po prostu „uszczegółowione metody".

Terminami wymagającym również zdefiniowania to pojęcia: decydowanie i techniki decyzyjne. Przypisanie określonego znaczenia tym pojęciom w kontekście określonych już terminów „metoda-technika" nie jest zagadnieniem łatwym. Z wielu różnych prób definicji terminu „decydowanie", formułowanych w nauce o zarządzaniu możemy przyjąć, że decydowanie to dokonywanie świadomego i nielosowego wyboru sposobu działania. Akcent w tym określeniu jest położony na słowo wybór. Inaczej ujmując pojęcie decydowania jako wyboru możemy powiedzieć, że jest to nadawanie z jakiegoś względu pierwszeństwa jednemu elementowi zbioru przed drugim. Decydowanie zatem jest szczególnym przypadkiem wybierania. Szczególność wynika z faktu, że wybór ma prowadzić do jakiegoś działania, czyli że w skład wchodzi pewne kryterium celu oraz sposoby i kierunki działania. Szczególność również może

[1] T. Kotarbiński, *Traktat o dobrej robocie,* Wrocław 1975.
[2] J. Zieleniewski, *Organizacja i zarządzanie*, Warszawa 1969.
[3] J. Supernat*, Techniki decyzyjne i organizatorskie*, Kolonia Limited. Wrocław 2003.

wynikać z faktu , że wybór musi być dokonany na podstawie jakiegoś nielosowego kryterium w sposób świadomy. Wynikiem decydowania jest więc decyzja jako akt świadomego i nielosowego wyboru jednego z rozpoznanych i uznanych za dopuszczalne kierunków działania. Definicja ta dobrze ujmuje problem, ma również walor operacyjny, pozwała bowiem w wielu konkretnych przypadkach jednoznacznie stwierdzić, czy mamy do czynienia tylko ze zwykłym wyborem, czy z wyborem szczególnym – decyzją.

Wyodrębnienie wśród ogółu wyborów tych, które zasługują na miano decyzji, następuje za pomocą kilku wymienionych cech charakterystycznych. Wprowadzenie do analizy decyzyjnej kolejnych cech prowadzi do wyróżnienia wśród ogółu decyzji specjalnych ich kategorii. Najbardziej doniosłą kategorią dla praktyki i nauki zarządzania są decyzje kierownicze. Tym się one różnią od pozostałych, że są związane z realizacją podstawowych funkcji kierowniczych, tzn. planowania i organizowania. Trafność podjętych decyzji ocenia się na podstawie stopnia zdolności osiągnięcia założonych celów. Z tego więc punktu widzenia decyzje mogą być racjonalne lub nieracjonalne oraz optymalne lub nieoptymalne. Celem ułatwienia dokonywania wyborów optymalnych opracowano szereg technik i metod wspomagających proces podejmowania decyzji. Jedną z istotnych technik decyzyjnych jest grupa metod opartych na teorii grafów, sieci i drzew decyzyjnych. Przedstawione w podręczniku wybrane metody z tej grupy mają przybliżyć Czytelnikowi ich aplikacyjny charakter i zachęcić do szerszego studiowania tego działu badań operacyjnych.

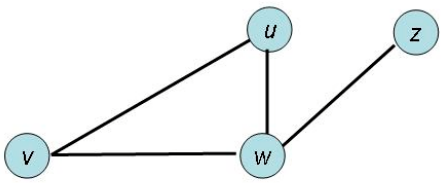
1. WPROWADZENIE DO TEORII GRAFÓW

1.1. PODSTAWOWE DEFINICJE I POJĘCIA TEORII GRAFÓW

Teoria grafów to dział matematyki zajmujący się badaniem własności grafów. Jest ważnym narzędziem matematycznym używanym w wielu różnych dziedzinach, takich jak informatyka, rachunek operacyjny, genetyka, lingwistyka i socjologia. Rozwijanie algorytmów wyznaczających pewne właściwości grafów jest jednym z bardziej znaczących pól działania informatyki, szczególnie do przedstawiania struktury danych. Algorytmy te stosuje się do rozwiązywania wielu zadań praktycznych, w dziedzinach, z których wiele, tylko na pozór nie jest związanych z matematyką czy informatyką.

Grafem nazywamy zbiór punktów (zwanych ***wierzchołkami*** lub ***węzłami***) połączonych ***krawędziami***, które czasem nazywa się ***łukami***.

Graf prosty G definiuje dwójka uporządkowana: $G=(V;E)$, gdzie $V(G)$ jest dowolnym niepustym zbiorem skończonym, którego elementy nazywamy ***wierzchołkami*** (lub ***węzłami***) natomiast $E(G)$ jest podzbiorem zbioru wszystkich 2-elementowych zbiorów, których elementy należą do $V(G)$, które nazywamy ***krawędziami***. Zbiór $V(G)$ nazywamy zbiorem wierzchołków, a zbiór $E(G)$ zbiorem krawędzi grafu G. Mówimy, że krawędź $\{v, w\}$ łączy wierzchołki v i w, i na ogół oznaczamy ją krócej symbolem vw. Na przykład na rysunku 1 widzimy graf prosty G, którego zbiorem wierzchołków $V(G)$ jest zbiór $\{u, v, w, z\}$ i którego zbiór krawędzi $E(G)$ składa się z krawędzi uv, uw, vw i wz.



Rysunek 1. Graf prosty G ze zbiorem wierzchołków $V(G)$ i krawędzi $E(G)$

Elementami zbioru $V(G)$ są punkty, które obrazują wierzchołki lub węzły, zaś elementami zbioru $E(G)$ są pary wierzchołków-sąsiadów. Dwa wierzchołki są sąsiadami, jeśli istnieje krawędź pomiędzy nimi. Inaczej interpretując; zbiór $E(G)$ jest zbiorem krawędzi grafu złożonego z wierzchołków $V(G)$.

Poszczególne elementy zbioru wierzchołków *V(G)* oraz krawędzi *E(G)* w grafach są w stosunku do siebie usytuowane logicznie, czyli tworzą pewną relację (*Γ*),

Bardziej formalny matematycznie zapis może wyglądać następująco:

$$V(G) \neq \varnothing$$

$$E(G) \subseteq V_2(G)$$

Dla grafów, którymi będziemy się zajmować *V(G)* oznaczać będzie skończony zbiór punktów stanowiących wierzchołki grafu:

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\},$$

zaś *E(G)* zbiór połączeń między tymi punktami:

$$E = \{a_1, a_2, a_3 \ldots a_m\}$$

gdzie istnienie (a_{ij}) oznacza istnienie krawędzi łączącej węzeł v_i z węzłem v_j.

Krawędzią *(i, j)* nazywamy połączenie v_i z v_j z uwzględnieniem orientacji (od v_i do v_j).

Stopniem wierzchołka nazywamy liczbę krawędzi, których końcem jest ten wierzchołek.

Trasą w grafach sieciowych nazywamy ciąg postępujących po sobie krawędzi (czynności szeregowych) umożliwiających przejście od wierzchołka początkowego do wierzchołka końcowego. Trasę, w której żaden wierzchołek nie występuje więcej niż jeden raz nazywamy ***drogą***.

Cykl jest drogą zamkniętą składającą się z następujących po sobie trzech lub więcej czynności tak skierowanych, że początek drogi schodzi się w tym samym wierzchołku z końcem drogi.

Pętlę stanowi krawędź, której początek i koniec stanowi ten sam wierzchołek.

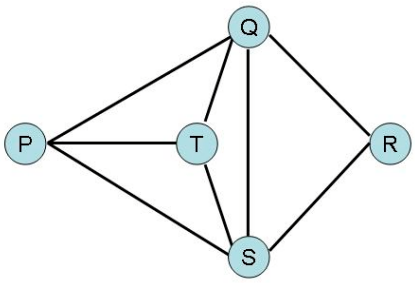
Grafy, w których występują cykle i pętle nazywany ***grafami cyklicznymi*** – grafy, w których cykle i pętle nie występują ***acyklicznymi***.

Grafy, w których **występuje relacja (Γ), tzn.** jeśli połączenia między węzłami są skierowane i kolejność występowania w czasie poszczególnych wierzchołków jest określona nazywamy **grafami** zorientowanym (lub skierowanymi), w przeciwnym przypadku, gdy połączenia między wierzchołkami występują bez uwzględnienia orientacji mamy do czynienia z **grafami niezorientowanymi**.

W większości zastosowań grafów w praktyce decyzyjnej mamy do czynienia z ***grafami ważonymi***, w których każdej krawędzi przyporządkowano liczbę wagę, może ona oznaczać na przykład odległość między wierzchołkami. Wag używa się na przykład w algorytmach znajdowania optymalnej drogi.

Istnieją grafy o szczególnych własnościach np. takie, w których istnieją trasy przechodzące przez każdą krawędź lub przez każdy wierzchołek dokładnie

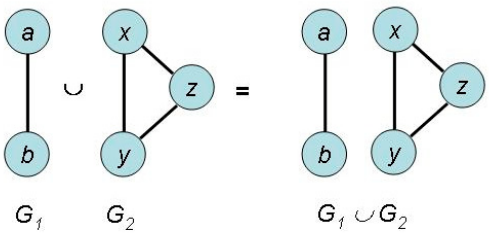
jeden raz i kończące się w punkcie wyjścia; takie grafy nazywamy odpowiednio grafami ***eulerowskimi*** i ***hamiltonowskimi***. Na przykład graf pokazany na rysunku 2 jest grafem hamiltonowskim; odpowiednią trasą jest $P \to Q \to R \to S \to T \to P$, lecz nie jest grafem eulerowskim, gdyż dowolna trasa, która przechodzi przez każą krawędź dokładnie jeden raz (np. taka jak $P \to Q \to R \to S \to T \to P \to S \to Q \to T$), musi zakończyć się w wierzchołku różnym od początkowego.



Rysunek 2. Graf prosty, niezorientowany (hamiltonowski)

Pewne grafy składają się z dwóch lub większej liczby części. Graf składający się z jednego kawałka, tzn. taki, w którym dowolne dwa wierzchołki można połączyć drogą, nazywamy ***grafem spójnym***; graf składający się z wielu kawałków nazywamy grafem ***niespójnym***.

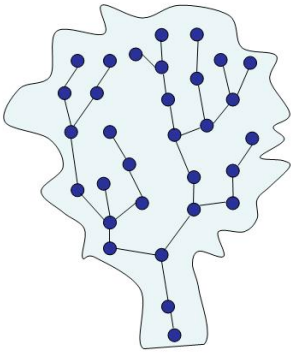
Możemy połączyć dwa grafy, by otrzymać graf większy. Jeśli tymi dwoma grafami są $G_1 = (V(G_1),E(G_1))$ i $G_2 = (V(G_2),E(G_2))$, gdzie zbiory $V(G_1)$ i $V(G_2)$ są rozłączne, to ***sumą*** tych grafów $G_1 \cup G_2$ jest graf, którego zbiorem wierzchołków jest zbiór $V(G_1) \cup V(G_2)$, a zbiorem krawędzi zbiór $E(G_1) \cup E(G_2)$, jak na rysunku 3.



Rysunek 3. Spójność grafów

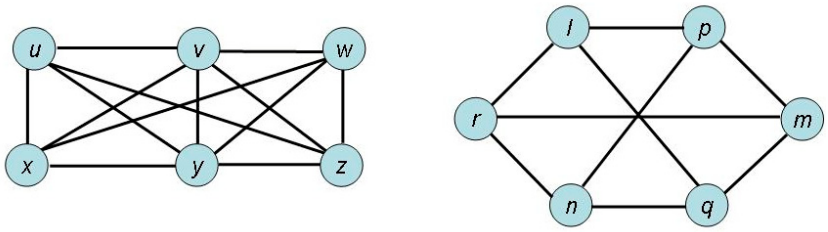
Graf nazywamy s***pójnym***, jeśli nie można go przedstawić w postaci sumy dwóch grafów — w przeciwnym razie nazywamy go grafem ***niespójnym***. Oczywiście, każdy graf niespójny *G* można przedstawić w postaci sumy grafów spójnych, nazywanych ***składowymi*** grafu G.

Grafami spójnymi, w których każdą parę wierzchołków można połączyć dokładnie jedną drogą nazywamy ***drzewami.***

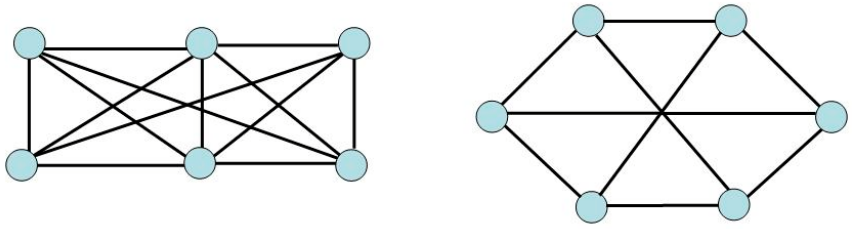


Rysunek 4. Graf w postaci drzewa

Mówimy, że dwa grafy G_1 i G_2 są ***izomorficzne***, jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między wierzchołkami grafu G_1 i grafu G_2 taka, że liczba krawędzi łączących dane dwa wierzchołki grafu G_1 jest równa liczbie krawędzi łączących odpowiadające im wierzchołki grafu G_2. Zatem dwa grafy pokazane na rysunku 5 są izomorficzne przy odpowiedniości $u \leftrightarrow l$, $v \leftrightarrow m$, $w \leftrightarrow n$, $x \leftrightarrow p$, $y \leftrightarrow q$, $z \leftrightarrow r$. W wielu zadaniach nazwy wierzchołków są niepotrzebne, więc je pomijamy. Mówimy wtedy, że dwa „***nieoznakowane grafy***" są *izomorficzne*, jeśli możemy tak przyporządkować nazwy wierzchołkom, by otrzymane „***grafy oznakowane***" były izomorficzne. Na przykład grafy nieoznakowane na rysunku 6 są izomorficzne, gdyż możemy oznakować wierzchołki, tak jak na rysunku 5.

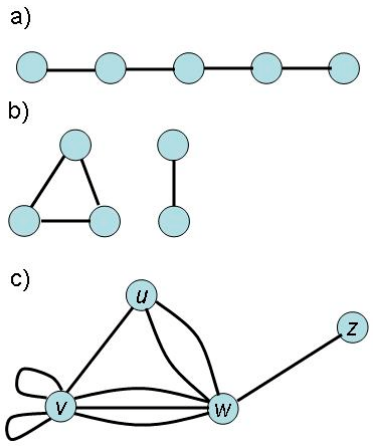


Rysunek 5. Grafy izomorficzne (oznakowane)



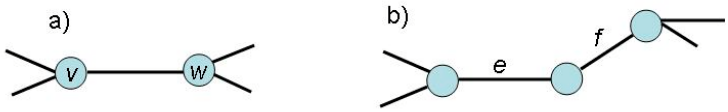
Rysunek 6. Grafy izomorficzne (nieoznakowane)

Stopień wierzchołka v grafu G oznaczany symbolem deg(v) jest liczbą krawędzi incydentnych z v; przy obliczaniu stopnia wierzchołka v przyjmuje się zwykle, że pętla w wierzchołku v powiększa stopień tego wierzchołka o 2 (a nie o 1). Wierzchołek stopnia 0 nazywamy ***izolowanym***, a wierzchołek stopnia 1 ***wierzchołkiem końcowym***. Zatem każdy z dwóch grafów na rysunku 7a i b ma dwa wierzchołki końcowe i trzy wierzchołki stopnia 2, a graf pokazany na rysunku 7c ma jeden wierzchołek końcowy, jeden wierzchołek stopnia 3, jeden wierzchołek stopnia 6 i jeden stopnia 8. ***Ciąg stopni*** grafu składa się ze stopni wierzchołków w kolejności wzrastającej, przy czym uwzględnione są w nim powtórzenia. Na przykład ciągami stopni grafów z rysunkach 7a i 7c są (1,2) oraz (1,3,6,8).



Rysunek 7. Stopień wierzchołka grafu

Mówimy, że dwa wierzchołki v i w grafu G są ***sąsiednie***, jeśli istnieje krawędź vw, która je łączy. Mówimy też wtedy, że wierzchołki v i w; są ***incydentne*** z tą krawędzią. Podobnie, dwie krawędzie e i f są sąsiednie, jeśli mają wspólny wierzchołek (rys. 8).



Rysunek 8. Sąsiedztwo w grafach: a) wierzchołki sąsiednie, b) krawędzie sąsiednie

1.2. MACIERZOWA POSTAĆ GRAFU

Strukturę grafu możemy przedstawić za pomocą pewnych macierzy związanych z tym grafem. Rozróżniamy tzw. macierz połączeń i macierz incydencji. Jeżeli graf zawiera *n* krawędzi, to ***macierz połączeń*** (sąsiedztwa) jest macierzą kwadratową $n \times n$ i zawiera elementy

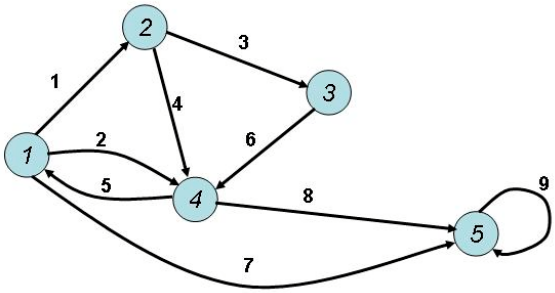
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

przy czym:

1 – pojawia się gdy występuje krawędź (*i, j*), zaś

0 – gdy krawędź (*i, j*) nie występuje.

Jeśli krawędzie grafu zaopatrzymy w strzałki, ustalające kierunki przepływu w grafie, to taki graf nazwiemy ***grafem skierowanym*** (zorientowanym).



Rysunek 9. Przykład grafu skierowanego G

Na rysunku 9 przedstawiono graf skierowany składający się z 5 wierzchołków i 9 krawędzi. W grafie tym:

– (*1,2*) (*2,3*) (*3,4*) (4,5) jest drogą,

– (*5,5*) jest pętlą,

– (*1,2*) (*2,4*) (*4,1*) jest cyklem.

Jeśli *G* jest grafem zorientowanym, którego wierzchołki są oznakowane liczbami ze zbioru {***1,2,…, n***}, to macierzą sąsiedztwa **A** jest macierzą wymiaru *n x n*, której wyraz o indeksach *i,j* jest równy liczbie krawędzi łączących wierz-

chołek *i* z wierzchołkiem *j*. Jeśli oznakujemy również krawędzie liczbami ze zbioru {***1,2,..,, m***}, to macierzą incydencji **M** nazwiemy macierz wymiaru *nxm*, której wyraz o indeksach *i,j* jest równy 1, jeśli wierzchołek *i* jest ***incydenty*** z krawędzią *j,* i równy 0 w przeciwnym razie.

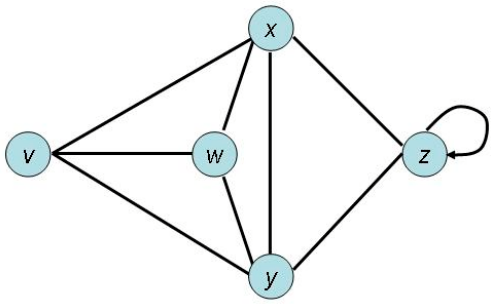
Macierze sąsiedztwa **A** i incydencji **M** tego grafu mają postać:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

1.3. DROGI I CYKLE W GRAFACH

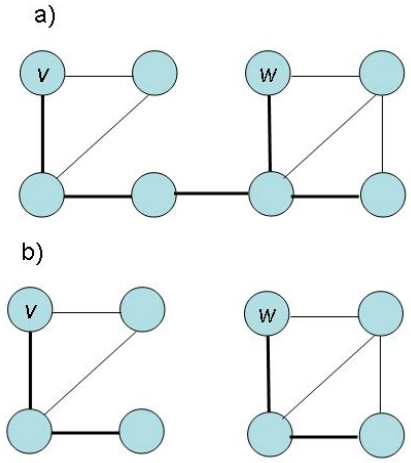
Wyjaśnijmy teraz pewne własności grafów związanych ze sposobami przechodzenia z jednego wierzchołka do drugiego. Pojęciami tymi są: trasa (marszruta), ścieżka, droga oraz cykl.

Trasą (lub ***marszrutą***) w danym grafie *G* nazywamy skończony ciąg krawędzi o postaci $v_0\, v_1,\ v_1 v_2,\ \ldots\ldots v_{m-1} v_m$, zapisywany również w postaci $v_o \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ldots \rightarrow v_m$, w którym każde dwie kolejne krawędzie są albo sąsiednie, albo identyczne. Taka trasa wyznacza ciąg wierzchołków $v_0, v_1, \ldots, v_m$. Wierzchołek v_0 nazywamy ***wierzchołkiem początkowym***, a wierzchołek v_m ***wierzchołkiem końcowym*** trasy; mówimy też wtedy o trasie od wierzchołka v_q do wierzchołka v_m. Liczbę krawędzi na trasie nazywamy ***długością trasy***; na przykład ciąg $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow z \rightarrow y$ na rysunku 10 jest trasą długości 7 od wierzchołka *v* do wierzchołka *w*.



Rysunek 10. Graf G – wyjaśnienie pojęć trasy, ścieżki, drogi i cyklu

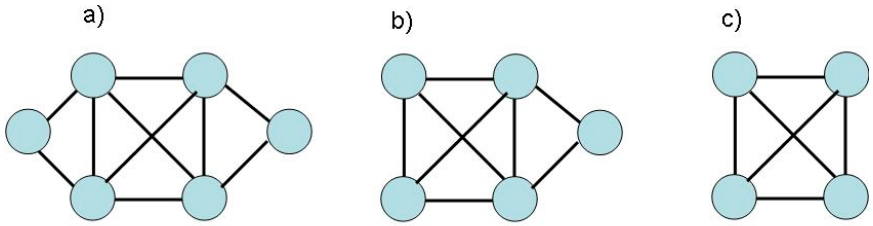
Pojęcie trasy jest na ogół zbyt ogólne jak na nasze potrzeby, wprowadzimy więc pewne ograniczenia. Trasę, w której wszystkie krawędzie są różne, nazywamy ścieżką. Jeśli ponadto wierzchołki $v_0, v_1, \ldots, v_m$ są różne (z wyjątkiem, być może, równości $v_0 = v_m$), to ścieżkę nazwiemy drogą. Droga lub ścieżka jest zamknięta, jeśli $v_0 = v_n$ ścieżkę zamkniętą zawierającą co najmniej jedną krawędź nazywamy cyklem. Zauważmy, że każda pętla lub para krawędzi wielokrotnych jest cyklem. Aby wyjaśnić te pojęcia, przyjrzyjmy się rysunkowi 10. Zobaczymy, że trasa $v \to w \to x \to y \to z \to x \to v$ jest ścieżką zamkniętą, a trasa $v \to w \to x \to y \to v$ cyklem. Cykl długości 3, taki jak $v \to w \to x \to v$, nazywamy trójkątem. Zauważmy, że graf jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy każda para wierzchołków jest połączona drogą. Zauważmy też, że G jest grafem dwudzielnym wtedy i tylko wtedy, gdy każdy cykl w G ma długość parzystą.



Rysunek 11. Spójność grafów: a) graf spójny, b) graf niespójny

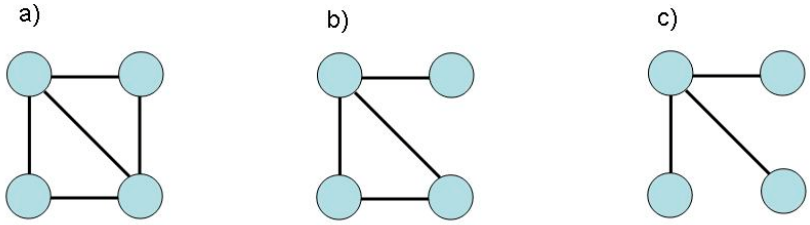
1.3.1 Grafy eulerowskie i hamiltonowskie

Graf spójny G nazywamy ***grafem eulerowskim***, jeśli istnieje zamknięta ścieżka zawierająca każdą krawędź G. Taką ścieżkę nazywamy ***cyklem Eulera***. Zauważmy, że ta definicja wymaga, by cykl Eulera przechodził przez każdą krawędź dokładnie jeden raz. Graf, który nie jest grafem eulerowskim, nazwiemy ***grafem półeulerowskim***, jeśli istnieje ścieżka zawierająca każdą krawędź grafu G. Na rysunku 12 widzimy przykłady grafów: eulerowskiego, półeulerowskiego oraz grafu, który nie jest grafem eulerowskim.



Rysunek 12. Graf: a) eulerowski, b) półeulerowski i c) nieeulerowski.

Zastanawialiśmy się już, czy istnieje ścieżka zamknięta zawierająca wszystkie krawędzie danego grafu spójnego G. Można sformułować podobne pytanie: czy istnieje zamknięta ścieżka przechodząca dokładnie jeden raz przez każdy wierzchołek grafu G? Zauważmy, że taka ścieżka na ogół musi być cyklem. Taki cykl nazywamy cyklem Hamiltona, a sam graf nazywamy grafem hamiltonowskim. Graf niehamiltonowski G nazywamy grafem półhamiltonowskim, jeśli istnieje droga przechodząca dokładnie jeden raz przez każdy wierzchołek. Na rysunku 13 a, b i c widzimy przykłady grafów: hamiltonowskiego, półhamiltonowskiego i niehamiltonowskiego.

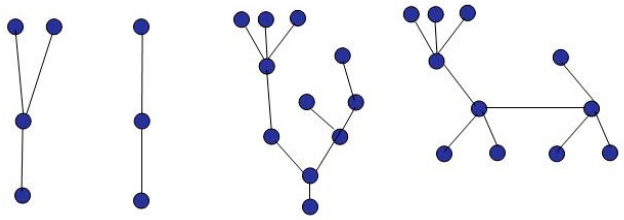


Rysunek 13. Grafy: a) hamiltonowski, b) półhamiltonowski i c) graf niehamiltonowski

1.3.2. Grafy drzewa i grafy zorientowane (sieci)

Ważnym pojęciem z zakresu teorii grafów jest pojęcie ***drzewa, lasu*** i ***drzewa rozpinającego***. Zastosowanie drzewa i ***drzewa rozpinającego*** we wspomaganiu procesów zarządzania zostanie wyjaśnione w dalszej części podręcznika – przy rozpatrywaniu zagadnienia minimalnego drzewa rozpinającego grafu.

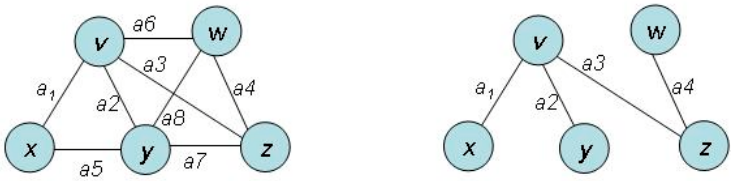
Lasem nazywamy graf niezawierający cyklu, a ***drzewem*** las spójny. Na przykład na rysunku 14 widzimy las składający się z czterech składowych, każda z nich jest drzewem. Zauważmy, że drzewa i lasy są grafami prostymi.



Rysunek 14. Drzewa i lasy jako grafy proste

W pewnym sensie drzewa są najprostszymi, nietrywialnymi typami grafów. Podstawową własnością charakteryzującą drzewa jest połączenie dwóch sąsiednich wierzchołków, tzn. że każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jedną drogą.

Jeśli wybierzemy jakiś cykl w grafie spójnym *G* i usuniemy którąkolwiek krawędź tego cyklu, to otrzymany graf będzie nadal spójny. Możemy powtarzać tę procedurę z dowolnym z pozostałych cykli dotąd, aż w grafie nie będzie już cykli. Powstanie w ten sposób drzewo, które spina wszystkie wierzchołki grafu G. Takie drzewo nazywamy ***drzewem spinającym*** grafu *G* (lub ***rozpinającym*** graf *G*). Przykład grafu i jednego z jego drzew spinających widzimy na rysunku 15.



Rysunek 15. Graf spójny i jego drzewo rozpinające

W dalszym ciągu zajmować się będziemy grafami, w których kierunek strzałek wskazuje na istnienie określonej relacji w grafie, czyli grafami zorientowanymi, bez cykli i pętli. Grafy takie nazywać będziemy ***sieciami***. Praktyczne zastosowanie sieci i związane z tym pojęcia i definicje są zasadniczym przedmiotem zainteresowania grafami i sieciami i im będzie poświęcona uwaga w dalszych częściach podręcznika.

2. TECHNIKA HARMONOGRAMÓW

Graficzne przedstawienie procesów produkcyjnych od dawna jest stosowane w praktyce inżynierskiej w postaci wykresów Gantta. Planowanie przebiegu przedsięwzięcia za pomocą harmonogramów dokonywane jest na dwuwymiarowym wykresie, którego oś odciętych (pozioma) przedstawia wyskalowaną oś czasu, natomiast oś rzędnych (pionowa) – nie jest wyskalowana i na niej zaznacza się czynności wchodzące w skład planowanego przedsięwzięcia, bądź wykonawców tych czynności (pracowników, stanowiska robocze itp.) W harmonogramach Gantta czas jest wyrażony w dowolnych jednostkach (minuty, godziny), bądź też jednostkach kalendarzowych (dniach, tygodniach, miesiącach itp.)

W zależności od rodzaju elementów zaznaczonych na rzędnej mamy do czynienia z dwoma rodzajami harmonogramów:

– harmonogramami postępów realizacji przedsięwzięcia,
– harmonogramami wykorzystania zdolności wykonawczych.

Harmonogramy postępów realizacji mają zaznaczone na osi rzędnych czynności, które wchodzą w skład złożonego przedsięwzięcia, natomiast harmonogramy wykorzystania zdolności wykonawczych – wykonawców poszczególnych czynności (np. harmonogram zatrudnienia).

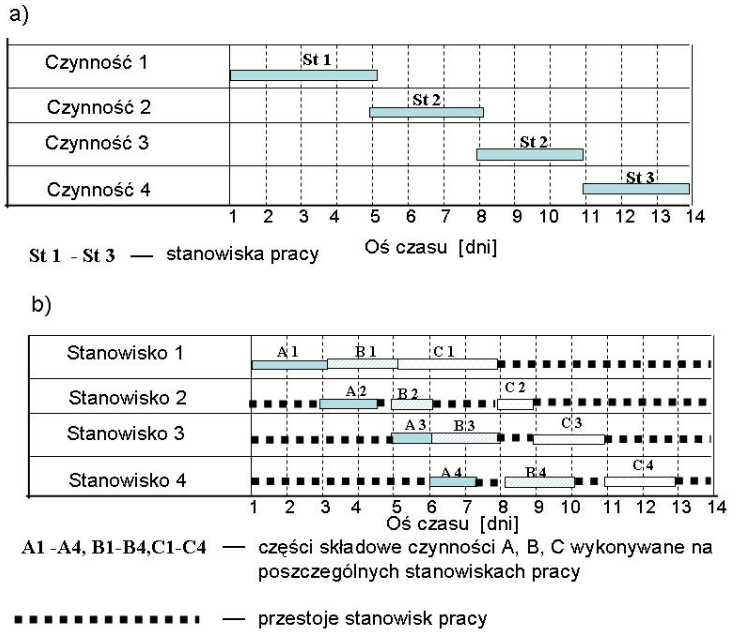
W technice harmonogramów czynności przedstawiane są w postaci odcinków o długości proporcjonalnej do czasu ich trwania. Przedstawienie czynności na wykresie Gantta nie jest dowolne. W harmonogramach postępu realizacji przedsięwzięcia musi być uwzględniona logiczna kolejności wykonywania poszczególnych czynności (technologia wykonania robót). W harmonogramach wykorzystania zdolności wykonawczych brane są pod uwagę czynniki umożliwiające optymalne planowanie wykorzystania środków (np. maszyn, brygad roboczych, stanowisk pracy).

Przykład dwóch rodzajów harmonogramów przedstawiono na rysunku 16a i 16 b.

Harmonogram postępów realizacji przedsięwzięcia (rys. 16a) i harmonogram wykorzystania zdolności wykonawczych (rys. 16b) przedstawia ten sam stan faktyczny realizacji rozpatrywanego przedsięwzięcia obserwowany z różnych punktów widzenia. Każdy z nich wykazuje określoną działalności związaną z upływem (stratą) czasu – pierwszy w odniesieniu do przebiegu realizacji, drugi do zdolności wykonawczych.

Harmonogram postępów realizacji przedsięwzięcia pokazuje w skali czasu przebieg wykonywania czterech czynności jedna po drugiej. Kolejność i sposób wykonywania tych czynności wynika z założeń technologicznych. Nad czynno-

ściami zaznaczono stanowiska pracy, na których te czynności muszą być wykonywane. Czynność 1 wykonywana jest przez 5 dni na stanowisku 1, czynność 2 wykonywana jest na stanowisku 2 przez 3 dni, potem na tym samym stanowisku jest wykonywana czynność 3. Czynność 4 jest wykonywana na stanowisku 3 przez 3 dni.



Rysunek 16. Przykłady podstawowych rodzajów harmonogramów

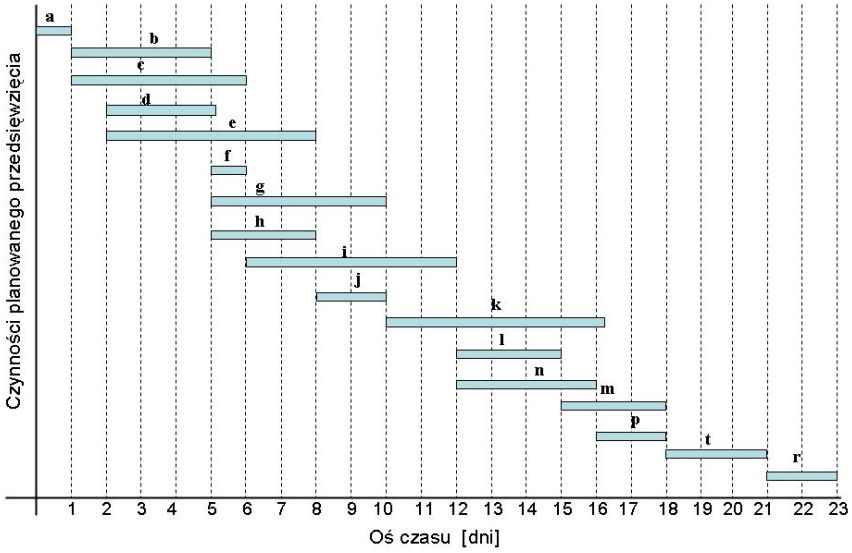
Harmonogram wykorzystania zdolności wykonawczych koncentruje uwagę na wykorzystaniu stanowisk pracy. Przyjmijmy, że technologia wykonania trzech czynności A, B i C wymaga wykonywania każdej z nich na czterech stanowiskach pracy w odpowiedniej kolejności. Czas wykonywania poszczególnych operacji związanych z każdą czynnością jest różny. Czas wykonywania każdej z tych czynności podzielono na cztery części, odpowiednio do wymagań technologicznych. Najistotniejszym elementem takiego harmonogramu jest przedstawienie wykorzystania każdego stanowiska pracy, a głównie wykazanie momentów przestoju każdego z nich.

Technika harmonogramu może być stosowana zarówno do planowania, jak i kontroli realizacji przedsięwzięć. W drugim przypadku technika harmonogramu musi być wzbogacona o instrumenty wprowadzania zmian w związku z pojawiającymi się odchyleniami realizacji czynności od planowanego ich przebiegu.

Zaletą harmonogramów jest ich przejrzystość, wynikająca z wizualizacji czynności w postaci odcinków proporcjonalnych do czasu ich trwania. Zaleta ta jest szczególnie widoczna w przypadku, gdy przedmiotem planowania są przedsięwzięcia o strukturze szeregowej lub szeregowo-równoległej (metoda kolejnego i równoczesnego wykonania) W przypadkach przedsięwzięć o bardziej złożonej strukturze, z czym mamy najczęściej do czynienia, przedstawienie ich w postaci przejrzystych wykresów Gantta staje się bardzo trudne, a niekiedy wręcz niemożliwe.

Na rysunku 17 przedstawiony został przykładowy harmonogram Gantta dla przedsięwzięcia składającego się z siedemnastu czynności, których kolejność wykonania warunkuje przyjęcie określonej logiki postępowania, np. technologii wykonywania robót.

Wykres harmonogramu Gantta takiego przedsięwzięcia podaje przebieg poszczególnych czynności w zależności od czasu, natomiast nie przedstawia kolejności wykonania poszczególnych czynności i czasu ich trwania, które można odczytać na osi czasu. Trudno jednoznacznie wywnioskować z takiego wykresu jakie są zależności między czynnościami oraz jaki wpływ na ostateczny termin zakończenia całego przedsięwzięcia może mieć opóźnienie lub przyspieszenie realizacji którejś z siedemnastu czynności. Wszelkie zmiany w terminach rozpoczęcia i zakończenia poszczególnych czynności wymagają zazwyczaj ponownej analizy i kolejnego przerysowania wykresu Gantta.



Rysunek 17. Przykład harmonogramu Gantta

Klasyczne harmonogramy mogą służyć zarówno do planowania, jak i kontroli realizacji projektów. W tym drugim przypadku na harmonogram zawierający plan prac nanosi się rzeczywiste ich wykonanie specjalnie oznaczoną linią. Harmonogramy takie służą przede wszystkim do ogólnego przeglądu stanu realizacji przedsięwzięcia.

Zasadniczą wadą harmonogramów jest brak możliwości przeprowadzenia optymalizacji programów działania pod względem czasu lub wykorzystywanych środków. Wady tej pozbawione są harmonogramy sieciowe, które są omawiane w następnych rozdziałach.

3. METODY SIECIOWE W ZARZĄDZANIU PRZEDSIĘWZIĘCIAMI

3.1. GRAFY SIECIOWE – SIECI ZALEŻNOŚCI

Grafy sieciowe, jako zbiór wierzchołków i krawędzi, mogą przedstawiać modele matematyczne dowolnego przedsięwzięcia realizowanego w określonym czasie i służą do ich analizy sieciowej. Model sieciowy przedsięwzięcia jest wyodrębnionym zbiorem czynności powiązanych z sobą technologią (sposobem wykonania), przedstawiony graficznie w postaci grafu. Taki graf nazywać będziemy ***siecią zależności***.

Sieć zależności to graf spójny bez cykli i pętli, który ma jeden wierzchołek początkowy i jeden wierzchołek końcowy. Krawędzie sieci reprezentują czynności, zaś wierzchołki zdarzenia.

Zależnie od tego czy elementami mianowanymi w grafie są krawędzie, czy wierzchołki, graf sieciowy można przedstawić jako graf przepływu czynności, tzw. ***sieć czynności*** lub graf stanów, czyli ***sieć zdarzeń***. Zarówno sieci przepływu czynności, jak i stanów mogą być stosowane do rozwiązywania tych samych zadań z organizacji i planowania pracy, są one pod względem treści równorzędne. Różnią się jednak układem graficznym i sposobem poszukiwania rozwiązań optymalnych.

Sieci zależności stosowane w analizie sieciowej przedsięwzięć i organizacji pracy są grafami zorientowanymi dodatnio i jako takie muszą wykazywać następujące właściwości:

Między dwoma następującymi po sobie wierzchołkami sieci, oznaczonymi przez V_i i V_j, istnieje tylko jedna droga o długości większej lub równej zeru, przy czym musi zachodzić zależność $i>j$.

Sieć nie może zawierać cykli, to znaczy, że nie zachodzi w sieci nigdzie zależność, aby równocześnie $V_i<V_j$ oraz $V<V_i$.

Sieć nie może zawierać pętli tj. nie może występować $V_i=V_j$, gdy ten sam wierzchołek jest dla tej samej krawędzi początkiem i końcem.

Sieć jest układem tranzytowym, tj. umożliwia przepływ czynności tylko w jednym kierunku; skoro $V_i<V_j$, zaś $V_j<V_k$ to wówczas między wierzchołkami V_i oraz V_k przebiega droga $(V_i,V_k)\notin E$.

W grafie sieciowym można jednocześnie określić wierzchołki i krawędzie poprzedzające, jak i wierzchołki i krawędzie następujące, jeśli między odnośnymi wierzchołkami istnieje powiązanie krawędziami.

Mianowanymi elementami sieci zależności są krawędzie, dla których określa się np. czasy trwania poszczególnych czynności modelowanego przedsięwzięcia. Przedstawiają one logiczny w czasie przebieg czynności procesu produkcyjnego, technologicznego lub funkcji zarządzania. Sieci czynności

stosowane są z reguły w klasycznych metodach planowania sieciowego (CPM, PERT, MPM-Metra[4]). Sieci czynności przypominają schematy map komunikacji drogowej lub kolejowej, z tą tylko różnicą, że długości odcinków nie muszą i najczęściej nie odpowiadają wartościom skalarnym jakie przedstawiają.

Krawędzie, czyli czynności, oznacza się wartościami liczbowymi, określającymi czas trwania poszczególnych czynności[5]. Wierzchołki, w których zbiegają się poszczególne czynności oznacza się na rysunkach cyframi w kółkach, numerując kolejno liczbami (numeracja porządkowa). Analiza sieci czynności polega na obliczaniu czasów rozpoczęcia i ukończenia poszczególnych czynności oraz na określeniu tzw. ***czynności krytycznych***, od których zależy czas wykonania całego przedsięwzięcia.

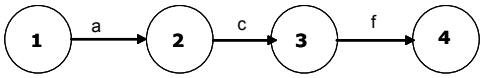
3.2. PODSTAWOWE ELEMENTY GRAFÓW SIECIOWYCH

Harmonogramy sieciowe oparte na metodzie grafów podają wzajemne powiązania poszczególnych czynności i kolejność ich wykonania, zgodnie z technologicznymi wymaganiami procesu pracy, są tzw. ***logistycznymi wykresami procesu pracy***.

W grafach sieciowych można wyróżnić następujące charakterystyczne elementy: wierzchołek początkowy lub ***zdarzenie początkowe***, od którego zaczyna się sieć zależności, nie poprzedzona żadnymi innymi wierzchołkami, wierzchołek końcowy lub ***zdarzenie końcowe***, na którym kończy się sieć grafu, po którym nie następują żadne inne zdarzenia.

Zależnie od wzajemnego stosunku poszczególnych czynności, czyli krawędzi sieci zależności, można rozdzielić:

– czynności szeregowe, które postępują w pewnej kolejności po sobie. Strzałki na poszczególnych krawędziach wskazują kolejność wykonywania tych czynności. Zapis czynności występujących szeregowo, kolejno po sobie przedstawiono na rysunku 18. Zapis taki należy interpretować następująco: czynność *b* następuje po zakończeniu czynności *a*, a czynność *c* rozpoczyna się z chwilą zakończenia czynności *b*. Na wykresie Gantta (rys. 17) odpowiada to czynnościom *n*, *p*, *t* i *r* wykonywanych jedna po drugiej.

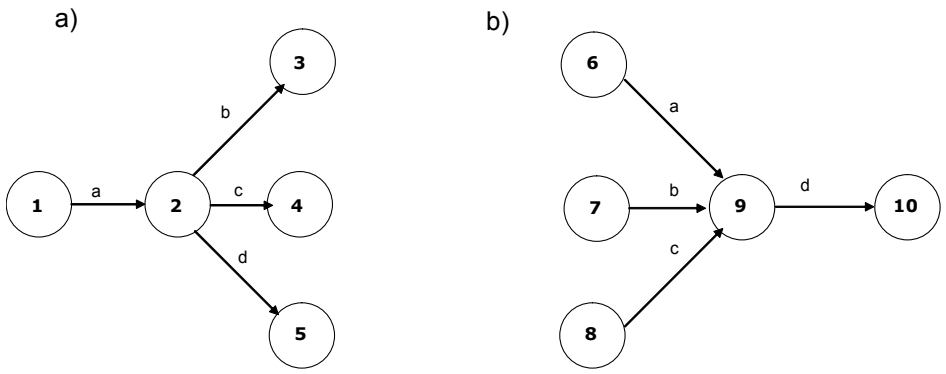


Rysunek 18. Zapis czynności wykonywanych kolejno po sobie

[4] CPM – *Critical Path Method*, PERT – *Program Evaluation and Review Technique*, MPM-Metra – *Metra Potential Methode*.

[5] Czasy trwania oznacza się w planowaniu czasu realizacji przedsięwzięcia. W analizie czasowo-kosztowej może to być koszt wykonania określonej czynności (PERT-COST) lub wielkość strumienia przepływu w analizie przepływu (Algorytm Forda-Fulkersona).

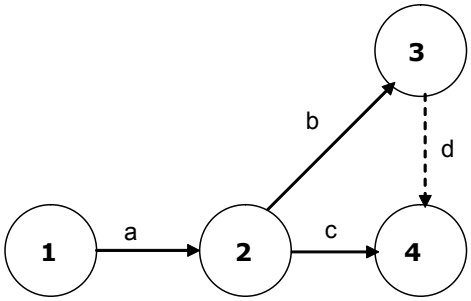
– czynności zbieżne lub rozbieżne zdążające do tego samego wierzchołka lub mające początek w tym samym wierzchołku przedstawione zostały na rysunku 19a i b.



Rysunek 19. Przykład czynności rozbieżnych i zbieżnych

Na rysunku 19a zaznaczono, że czynności a, b, i c rozpoczynają się w tym samym momencie (trwają równolegle) zaś na rys.19b czynności *a,b,* i *c* kończą się w tym samym momencie

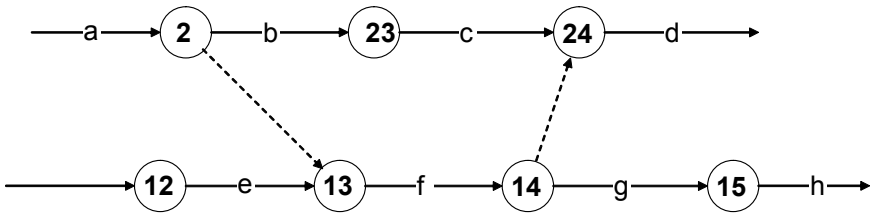
Dla przedstawienia bardziej skomplikowanych przykładów wzajemnych zależności zachodzących pomiędzy czynnościami w teorii grafów wprowadzono pojęcie ***czynności pozornej***. W analizie czasowej sieci zależności czas trwania czynności pozornej jest równe zeru. Czynność ta w odróżnieniu od czynności rzeczywistej nie pochłania żadnych środków (czasu, materiałów itp.) i jest używana do przedstawienia powiązań i zależności technologicznych między czynnościami w grafie. Czynność pozorna jest rysowana linią przerywaną.



Rysunek 20. Zastosowanie czynności pozornej w grafach sieciowych

Na rysunku 20 przedstawiono przykład zastosowania czynności pozornej w sieciach zależności.

Czynności *b* i *c* trwają równolegle (rozpoczynają się w tym samym momencie), jednak czynność *b* musi zakończyć się wcześniej lub w tym samym momencie co czynność *c*.



Rysunek 21. Wykorzystanie czynności pozornych do porządkowania zależności między ciągami czynności

Dwa równolegle realizowane dowolne ciągi czynności *a-b-c-d* oraz *e-f-g-h* (rys. 21) połączone czynnościami pozornymi wskazują wzajemną zależność, z której wynika, że czynność *a* realizowana w ciągu czynności *a-b-c-d* musi zakończyć się przed rozpoczęciem czynności *f* z ciągu *e-f-g-h*, a dopiero po jej zakończeniu może być rozpoczęta czynność *d*.

3.3. STOPIEŃ UWZGLĘDNIENIA SZCZEGÓŁÓW W GRAFACH SIECIOWYCH

Sieci zależności przedstawiające dany proces technologiczny mogą być mniej lub bardziej szczegółowe, zależnie od potrzeb i możliwości rachunkowych. Na przykład samo zamontowanie deski rozdzielczej samochodu Opel Astra II rozłożono na ponad 900 czynności cząstkowych. Oczywiście w codziennej praktyce organizatorskiej na poziomie zarządzania operacyjnego tak znaczne rozszczepienie czynności jest zbędne. Zazwyczaj najmniejsza czynność, na jaką dzieli się program, nie powinna być mniejsza niż 3 promile czasu trwania całego procesu pracy. Z punktu widzenia efektywności zarządzania celowe jest zachowanie pewnych rozsądnych proporcji w podziale na poszczególne czynności.

Obecne sieci zależności rozwiązywane są za pomocą programów komputerowych. Najprostszy z nich i najbardziej popularny, MS Project, wchodzi w skład pakietu MS Office. Bardziej profesjonalne, np. Primavera stanowią specjalistyczne aplikacje dostosowane do projektowania przedsięwzięć zawierających od kilkudziesięciu do kilkuset czynności oraz problemów wymagających optymalizacji zasobów.

3.4. KONSTRUKCJA SIECI ZALEŻNOŚCI

Graf sieciowy jako matematyczny model rzeczywistego układu czynności i zdarzeń powinien w sposób jak najdoskonalszy odwzorowywać przebieg rozpatrywanego przedsięwzięcia. Przy przedstawianiu za pomocą grafu sieciowego procesów poddawanych analizie musi być zachowany związek między poszczególnymi czynnościami i zdarzeniami, wynikający z całego procesu technologicznego i organizacyjnego przedsięwzięcia. Toteż dokładna znajomość technologii procesu jest podstawą należytego opracowania grafu sieciowego. Również prawidłowo skonstruowany graf w postaci sieci zależności pozwoli na przeprowadzenie wnikliwej analizy procesu.

Warunkiem poprawnej konstrukcji i analizy sieci zależności jest rozróżnienie dwóch ściśle związanych z sobą procesów: ustalenia programu działania, tj. określenia co, gdzie i kiedy oraz w jakiej kolejności ma być wykonane do zrealizowania przedsięwzięcia oraz ustalenia terminów rozpoczęcia i ukończenia poszczególnych czynności i czasu wykonania całego zadania.

Przed narysowaniem grafu sieciowego należy sporządzić zestawienie wszystkich czynności składających się na rozpatrywane przedsięwzięcie oraz określić logiczne związki między poszczególnymi czynnościami, a w szczególności ustalić:

– jakie czynności poprzedzają daną czynność,
– jakie czynności następują po danej czynności,
– jakie czynności mogą przebiegać równolegle.

Mając ustaloną w ten sposób nomenklaturę oraz wzajemne powiązania poszczególnych czynności lub zdarzeń, można przystąpić do kreślenia sieci zależności.

Przy kreśleniu rysunków sieci należy zwrócić uwagę na podstawowe zasady algebry grafów sieciowych i przestrzegać następujących reguł:

Każda czynność musi zaczynać się w wierzchołku i, a kończyć w wierzchołku j, czyli musi mieć swoje zdarzenie początkowe i zdarzenie końcowe, pamiętając o zależności $i<j$.

Zdarzenie początkowe nie ma czynności poprzedzających oraz zdarzenie końcowe nie ma czynności następujących.

Dwie czynności nie mogą zaczynać i kończyć się w tych samych dwóch wierzchołkach sieci. Stąd wynika, że dwa wierzchołki sieci nie mogą być bezpośrednio połączone dwiema równoległymi krawędziami.

Czynności lub krawędzie wskazujące kolejności zdarzeń nie muszą być rysowane w postaci linii prostych, mogą one mieć również kształt łuków lub innych w dowolny sposób wygiętych krzywych, tak aby mogły połączyć odpowiednie zdarzenia. Kształt ich nie ma więc żadnego znaczenia, choć ze względu na uzyskanie odpowiedniej przejrzystości grafu najczęściej nadaje im się kształt linii prostych.

Długości krawędzi, przedstawiających czasy trwania czynności, nie są proporcjonalne ani do czasu, kosztów lub zużycia materiałów, jakie reprezentują, ani tez do żadnej innej wartości skalarnej, którą oznaczają.

Przyjmijmy teraz założenie, że przedstawiony na rysunku 22 wykres Gantta jest harmonogramem realizacji pewnego, określonego procesu produkcyjnego, którego logiczny model chcemy przedstawić w postaci grafu sieciowego. Jednak, jak wcześniej wspomniano, aby narysować sieć zależności, należy sporządzić zestawienie wszystkich czynności składających się na rozpatrywane przedsięwzięcie i określić logiczne związki między poszczególnymi czynnościami. Rozpatrywany proces produkcyjny składa się z siedemnastu czynności, które należy wykonać zgodnie z wymogami technologicznymi oraz ustalonymi warunkami wynikającymi z przyjętej organizacji robót. Założenia technologiczne i organizacyjne procesu przedstawiają się następująco:

– *a* jest czynnością początkową,

– czynności *b, c* nie można rozpocząć, dopóki nie zostanie ukończona czynność *a,*

– czynności *d* i *e* rozpoczynają się równocześnie po ukończeniu czynności *a,*

– rozpoczęcie czynności *f* uwarunkowane jes zakończeniem czynności *d*,

– czynności *g* i *h* są wykonywane równolegle i nie mogą się rozpocząć, dopóki czynność *b* nie zostanie ukończona,

– czynność *i* może być rozpoczęta po zakończeniu czynności *c*,

– wykonanie czynności *j* umożliwia rozpoczęcie czynności *k*,

– czynność *l* można rozpocząć po ukończeniu czynności *i,*

– rozpoczęcie czynność *l* i *n* poprzedza wykonanie czynność *i,*

– czynność *p* musi następować po zakończeniu czynności *n*,

– czynność *m* może się rozpocząć po ukończeniu *l* oraz warunkuje rozpoczęcie czynność *t,*

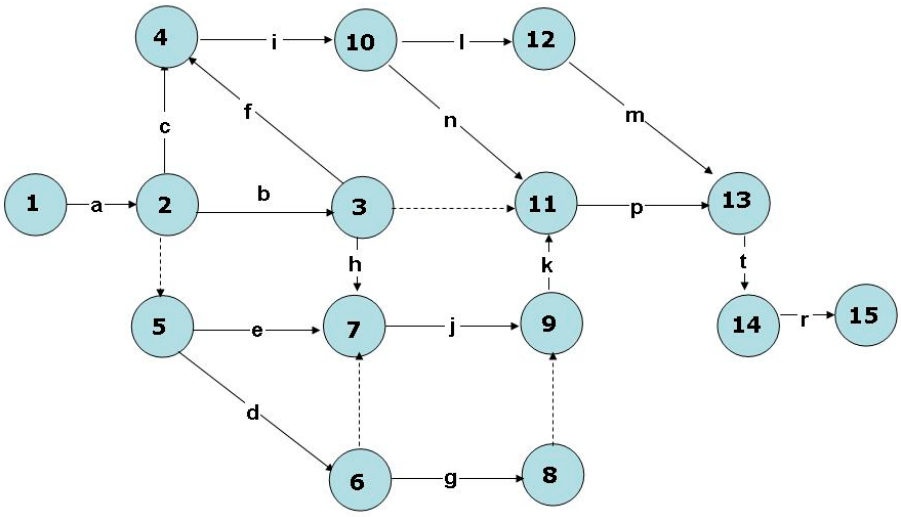
– czynność *n* może się rozpocząć po ukończeniu czynności *i,*

– czynność *k* musi następować po zakończeniu czynności *g*,

– czynność *p* musi wyprzedzać czynność *t*, a rozpocząć się po ukończeniu czynności *n*,

– czynność *r* jest czynnością końcową i jest zależna od ukończenia wszystkich poprzednich czynności.

Należy więc, na podstawie przedstawionych założeń technologiczno-organizacyjnych skonstruować sieć zależności dla tak zdefiniowanego procesu produkcyjnego. Sieć taka została zamieszczona na rysunku 22.



Rysunek 22. Sieć zależności przedsięwzięcia opracowana na podstawie założeń technologiczno-organizacyjnych

4. ANALIZA SIECI ZALEŻNOŚCI

Analiza sieci zależności przedstawiających dowolny projekt polega na:

– określeniu możliwie najkrótszego czasu wykonania całego programu pracy, czyli określenia długości tzw. ***drogi krytycznej***,

– wyznaczeniu przebiegu drogi krytycznej i czynności krytycznych, leżących na tej drodze, przebiegającej od wierzchołka początkowego do wierzchołka końcowego grafu sieciowego,

– określeniu ***najwcześniejszych możliwych*** i ***najpóźniejszych dopuszczalnych*** terminów rozpoczęcia i ukończenia poszczególnych czynności, wchodzących w skład danego grafu sieciowego.

Analizę taką można przeprowadzić kilkoma sposobami w zależności od rodzaju sieci (***sieci deterministyczne*** i ***sieci stochastyczne***) oraz stopnia jej skomplikowania. Sieci deterministyczne (CPM) to takie sieci, w których czas trwania czynności lub każdej innej wartości skalarnej przypisanej krawędzi jest ***jednoznacznie określony*** (zdeterminowany). Modele stochastyczne zakładają, że czasy trwania czynności można określić jedynie z ***pewnym prawdopodobieństwem*** (PERT i PERT-COST). Sieci stochastyczne (PERT) stosujemy, jeśli trudno jest jednoznacznie określić czas trwania czynności. Korzystając z oszacowań statystycznych, podajemy wówczas wartość oczekiwaną czasu trwania czynności oraz jego wariancje, a następnie określamy prawdopodobieństwo zakończenia projektu w interesującym nas czasie.

Obecnie najczęściej do analizy grafów sieciowych wykorzystujemy powszechnie dostępne programy komputerowe, które wymagają jedynie wprowadzenia danych opisujących konstrukcję sieci zależności oraz podania wartości skalarnych przypisanych poszczególnym krawędziom grafu. Analiza komputerowa bazuje na macierzowej postaci grafu i wykorzystuje analityczne metody rozwiązywania, przy użyciu algorytmów. Grafy mniej skomplikowane (do kilkudziesięciu czynności) rozwiązujemy graficzne, na rysunku grafu sieciowego. Zakres skryptu ogranicza nasze zainteresowania do metod graficznych, na rysunku sieci, jako metod podstawowych pozwalających na zrozumienie metod algorytmicznych. Zachęcamy jednak Czytelnika do sięgnięcia po szerszą literaturę przedmiotu, w której są opisane metody algorytmiczne, pomocne przy opracowywaniu własnych programów komputerowych do specyficznych analiz sieci zależności.

W zakresie skryptu przedstawione zostaną metody analizy grafów sieciowych dotyczących rozwiązywania sieci deterministycznych (CPM) oraz sieci stochastycznych (PERT).

4.1. ANALIZA DROGI KRYTYCZNEJ W SIECIACH DETERMINISTYCZNYCH (CPM)

Po narysowaniu sieci zależności dla danego programu lub procesu produkcyjnego, należy przypisać poszczególnym krawędziom grafu określone wartości skalarne oznaczające ich miana, jak np. czasy trwania czynności, koszty ich wykonania, nakłady materiałowe itp.

Rozpatrzmy tu zastosowanie sieci zależności do określenia czasu wykonania całego programu oraz do wyznaczenia terminów realizacji poszczególnych czynności. Zakładamy tu, że czasy poszczególnych czynności, jak też i kolejność ich wykonania wynikają z procesu technologicznego.

Całkowity czas realizacji całego programu odpowiada trwaniu najdłuższego ciągu czynności, czyli sumie czasów najdłuższej drogi od zdarzenia początkowego do zdarzenia końcowego.

Analiza deterministycznej sieci zależności obejmuje, oprócz znalezienia całkowitego czasu trwania, następujących charakterystyk programu:

– wyznaczenia drogi krytycznej przedsięwzięcia, określenia wszystkich czynności leżących na jej drodze oraz czasu jej trwania,

– wyznaczenia terminów zaistnienia poszczególnych zdarzeń reprezentowanych przez wierzchołki grafu, wyznaczenia luzów czasowych dla zdarzeń,

– wyznaczenia najpóźniejszych możliwych i najwcześniejszych dopuszczalnych terminów rozpoczęcia i zakończenia poszczególnych czynności. Ponieważ każde zdarzenie w sieci jest zdarzeniem początkowym jakiejś czynności oraz zdarzeniem końcowym innej – terminy zaistnienia określonych zdarzeń określają terminy rozpoczęcia i zakończenia poszczególnych czynności.

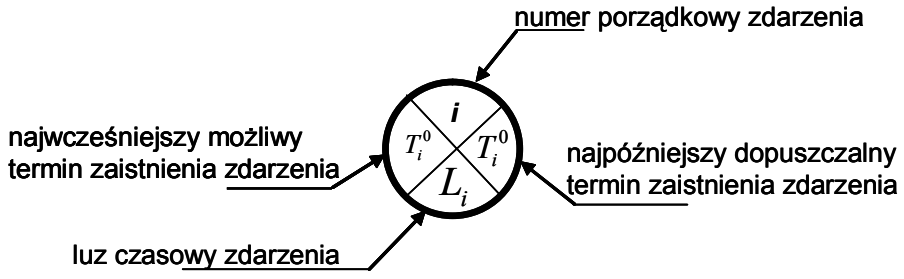
Przeprowadzenie analizy drogi krytycznej bezpośrednio na rysunku grafu wymaga odpowiedniego przygotowania samego rysunku. Zdarzenia, czyli wierzchołki sieci, mogą mieć tylko dwa terminy, które określają moment zajścia tych zdarzeń w czasie realizacji projektu. Są nimi: ***najwcześniejszy możliwy*** oraz ***najpóźniejszy dopuszczalny*** termin, w którym zdarzenie może zaistnieć. Terminy te wynikają z procesu technologicznego przedstawionego modelem sieciowym oraz przyporządkowanym czasom trwania poszczególnych czynności. Terminy te muszą więc być w jakiś sposób w grafie zaznaczone.

Przyjmijmy, że terminy zaistnienia zdarzeń będziemy oznaczać symbolem T z odpowiednim indeksem górnym i dolnym. Indeksem dolnym oznaczać będziemy numer porządkowy zdarzenia, natomiast indeksami górnymi w postaci zera lub jedynki odpowiednio – najwcześniejszy możliwy oraz najpóźniejszy dopuszczalny termin zaistnienia danego zdarzenia:

T_i^0 – najwcześniejszy możliwy termin zajścia zdarzenia i,

T_i^1 – najpóźniejszy dopuszczalny termin zajścia zdarzenia i.

Jednym ze sposobów oznaczania tych terminów na rysunku grafu jest wykreślenie wierzchołków grafu w postaci kół z wydzielonymi czterema polami. W polach tych wpisywać będziemy wyznaczone terminy zaistnienia poszczególnych zdarzeń – według schematu zamieszczonego na rysunku 23.



Rysunek 23. Schemat oznaczania wierzchołków sieci (zdarzeń) w analizie drogi krytycznej przeprowadzonej na rysunku

Terminy rozpoczęcia i zakończenia czynności wynikają z terminów zaistnienia ich zdarzeń początkowych i końcowych. Ponieważ każda czynność w sieci ma swoje zdarzenie początkowe, które ma dwa możliwe terminy zajścia oraz zdarzenie końcowe również o dwóch terminach, można zatem czynnościom przyporządkować cztery terminy – po dwa dla rozpoczęcia i dla zakończenia.

Jeżeli przez t_{ij} oznaczymy czas trwania czynności *i-j* to terminy dla poszczególnych czynności oznaczać będziemy symbolem *t* z odpowiednimi indeksami:

t_{ij}^{0p} – najwcześniejszy możliwy termin rozpoczęcia czynności *i-j*,

t_{ij}^{1p} – najpóźniejszy dopuszczalny termin rozpoczęcia czynności *i-j*,

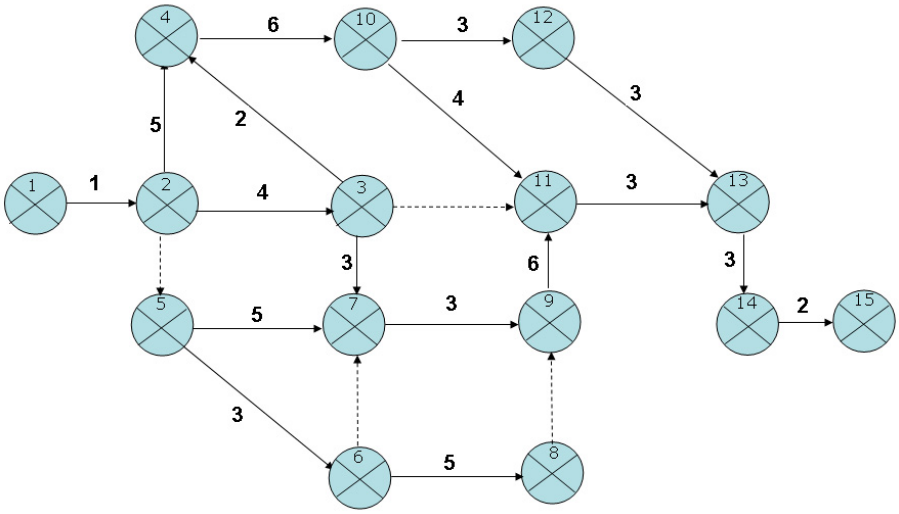
t_{ij}^{0k} – najwcześniejszy możliwy termin zakończenia czynności *i-j*,

t_{ij}^{1k} – najpóźniejszy dopuszczalny termin zakończenia czynności *i-j*,

Przyporządkujmy zatem czasy trwania poszczególnym czynnościom sieci zależności przedstawionej na rysunku 23 oraz wykreślmy wierzchołki grafu w postaci kółek z wydzielonymi czterema polami.

Analiza drogi krytycznej w sieciach zależności składa się z dwóch kroków. Wykonując pierwszy z nich, zwany ***krokiem w przód***, otrzymujemy *najwcześniejsze możliwe terminy* zaistnienia zdarzeń. Drugi krok, czyli ***krok w tył***, umożliwia wyznaczenie *najpóźniejszych dopuszczalnych terminów* zajścia poszczególnych zdarzeń w sieci. Różnica pomiędzy tymi terminami pozwala określić, dla każdego zdarzenia tzw. ***luz czasowy***. Zdarzenia, dla których luz czasowy jest równy zeru nazywamy ***zdarzeniami krytycznymi*** a droga w sieci od zdarze-

nia początkowego, poprzez zdarzenia krytyczne do zdarzenia końcowego, nazywana jest ***drogą krytyczną***. Czas wykonania czynności zgodnie z tą drogą określa możliwy najkrótszy termin zakończenia przedsięwzięcia.



Rysunek 24. Sieć zależności przygotowana do analizy drogi krytycznej

Rozpocznijmy zatem analizę drogi krytycznej przedsięwzięcia zobrazowanego grafem (rys. 24) od wyznaczenia ***najwcześniejszych możliwych*** terminów zaistnienia wszystkich zdarzeń w sieci (***krok w przód***).

Najwcześniejszy możliwy termin zaistnienia zdarzenia określony jest wzorem:

$$T_j^0 = \max_i \{T_i^0 + t_{ij}\}, \qquad i < j \tag{1}$$

Przyjmijmy, że $T_1^0 = 0$ czyli, zatem najwcześniejszy możliwy termin zajścia zdarzenia 2 wynosi:

$$T_2^0 = \max_1 \{T_1^0 + t_{1,2}\} = 0 + 1 = 1 \tag{2}$$

ponieważ zdarzenie 2 poprzedza bezpośrednio zdarzenie 3 zatem najwcześniejszy możliwy termin zajścia zdarzenia 3 jest równy najwcześniejszemu możliwemu terminowi zajścia zdarzenia poprzedzającego zdarzenie 3, czyli zdarzenia 2 plus czas trwania czynności *2-3*, zatem:

$$T_3^0 = \max_i \{T_2^0 + t_{2,3}\} = 1 + 4 = 5 \tag{3}$$

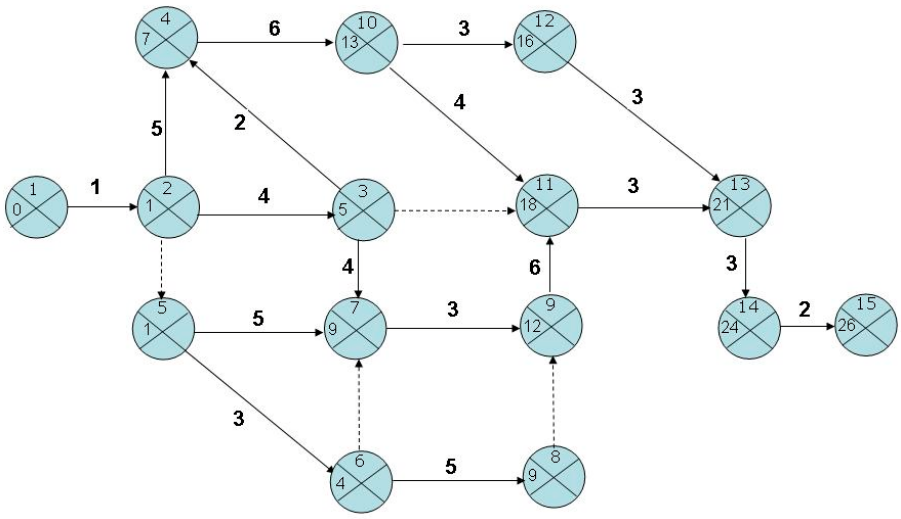
zdarzeniami poprzedzającymi zdarzenie 4 są zdarzenia 2 i 3 zatem musimy wybrać wartość większą z obliczonej wzorem:

$$T_4^0 = \max_i \begin{Bmatrix} T_2^0 + t_{2,4} \\ T_3^0 + t_{3,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1+5=6 \\ 5+2=7 \end{Bmatrix} = 7 \tag{4}$$

podobnie wyznaczymy najwcześniejszy możliwy termin zaistnienia zdarzenia 5 wybierając wartości większą z możliwości:

$$T_5^0 = \max_i \{T_1^0 + t_{2,5}\} = 1 + 0 = 1 \tag{5}$$

Postępując w ten sposób do końca sieci, do zdarzenia 15 wyznaczymy najwcześniejsze możliwe terminy zaistnienia wszystkich zdarzeń. Wyniki analizy sieci zależności w pierwszym kroku (kroku w przód) przedstawia rysunek 25.



Rysunek 25. Wyniki analizy drogi krytycznej w pierwszym kroku

W drugim kroku analizy (***krok w tył***) wyznaczymy ***najpóźniejsze dopuszczalne terminy*** zaistnienia zdarzeń w sieci. ***Najpóźniejszy dopuszczalny termin*** zaistnienia *i*-tego zdarzenia wyznaczony jest następująco:

$$T_i^1 = \min_j \{T_j^1 - t_{ij}\}, \qquad i < j \tag{6}$$

Najwcześniejszy i najpóźniejszy termin zdarzenia końcowego w sieci są sobie równe, gdyż zdarzenie końcowe nie ma następnika. Zatem:

$$T_{15}^1 = T_{15}^0 = 26 \tag{7}$$

Zgodnie ze wzorem 6 najpóźniejszy dopuszczalny termin zaistnienia zdarzenia 14 obliczymy, odejmując od najpóźniejszego termin zdarzenia poprzedniego 15 (idąc wstecz od zdarzenia końcowego) czas trwania czynności $t_{14,15}$.

$$T_{14}^{1} = \min_{j}\{T_{15}^{1} - t_{14,15}\} = 26 - 2 = 24 \tag{8}$$

Najpóźniejszy dopuszczalny termin zdarzenia 13 wyniesie:

$$T_{13}^{1} = \min_{j}\{T_{14}^{1} - t_{13,14}\} = 24 - 3 = 21 \tag{9}$$

a następnie dla:

$$T_{12}^{0} = \min_{j}\{T_{13}^{1} - t_{12,13}\} = 21 - 3 = 18 \tag{10}$$

$$T_{11}^{1} = \min_{j}\{T_{13}^{1} - t_{11,13}\} = 21 - 3 = 18 \tag{11}$$

$$T_{10}^{1} = \min_{j}\begin{Bmatrix} T_{12}^{1} - t_{10,12} \\ T_{11}^{1} - t_{10,11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18 - 3 = 15 \\ 18 - 4 = 14 \end{Bmatrix} = 14 \tag{12}$$

$$T_{8}^{1} = \min_{j}\{T_{9}^{1} - t_{8,9}\} = 12 - 0 = 12 \tag{13}$$

$$T_{7}^{1} = \min_{j}\{T_{9}^{1} - t_{7,9}\} = 12 - 3 = 9 \tag{14}$$

$$T_{6}^{1} = \min_{j}\begin{Bmatrix} T_{7}^{1} - t_{6,7} \\ T_{8}^{1} - t_{6,8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 - 0 = 9 \\ 12 - 5 = 7 \end{Bmatrix} = 7 \tag{15}$$

$$T_{5}^{1} = \min_{j}\begin{Bmatrix} T_{6}^{1} - t_{5,6} \\ T_{7}^{1} - t_{5,7} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 - 3 = 4 \\ 9 - 5 = 4 \end{Bmatrix} = 4 \tag{16}$$

$$T_{4}^{1} = \min_{j}\{T_{10}^{1} - t_{4,10}\} = 14 - 6 = 8 \tag{17}$$

$$T_{3}^{1} = \min_{j}\begin{Bmatrix} T_{4}^{1} - t_{3,4} \\ T_{11}^{1} - t_{3,11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 - 4 = 5 \\ 18 - 0 = 18 \end{Bmatrix} = 5 \tag{18}$$

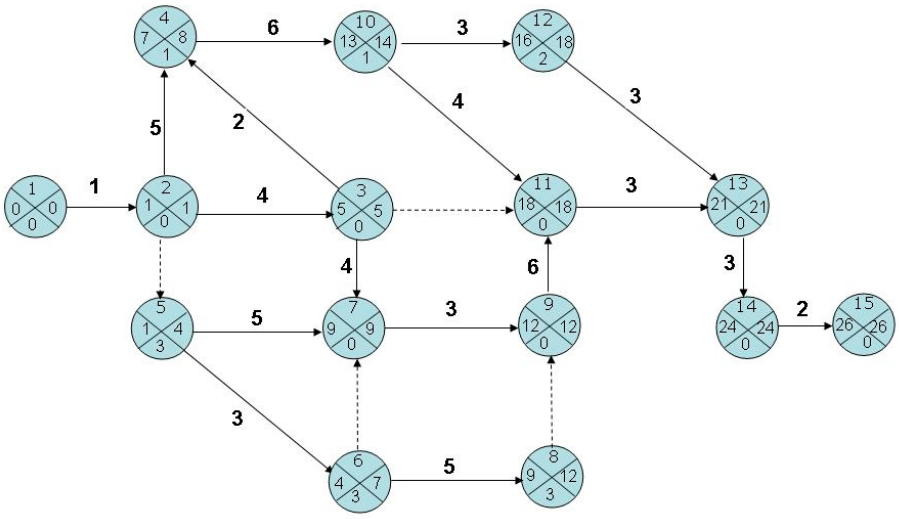
$$T_{2}^{1} = \min_{j}\begin{Bmatrix} T_{4}^{1} - t_{2,4} \\ T_{3}^{1} - t_{2,3} \\ T_{5}^{1} - t_{2,5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 - 5 = 3 \\ 5 - 4 = 1 \\ 4 - 0 = 4 \end{Bmatrix} = 1 \tag{19}$$

$$T_1^1 = \min_j \{T_2^1 - t_{1,2}\} = 1 - 1 = 0 \tag{20}$$

Luzy czasowe dla zdarzeń policzymy z zależności:

$$L_i = T_i^1 - T_i^0 \tag{21}$$

Wyniki postępowania w drugim kroku analizy (kroku wstecz) oraz wyznaczonych z formuły (21) luzów czasowych przedstawiono poniżej na rysunku 26.



Rysunek 26. Wyniki analizy drogi krytycznej

Z rysunku 26 wynika, że droga od zdarzenia początkowego do końcowego przechodząca przez zdarzenia krytyczne, których luz czasowy jest równy zeru, jest drogą krytyczną (*1-2-3-7-9-11-13-14-15*). Jest to najdłuższa droga w grafie, a zarazem określa możliwie najkrótszy termin realizacji całego przedsięwzięcia.

Analiza drogi krytycznej grafu oprócz określenia drogi krytycznej wymaga wyznaczenia terminów rozpoczęcia i zakończenia poszczególnych czynności oraz możliwości przesunięcia w czasie tych terminów w granicach wyznaczonych przez czas krytyczny.

Z definicji grafu sieciowego wiemy z kolei, że każda czynność musi mieć swoje zdarzenie początkowe oraz zdarzenie końcowe. Jeśli każdemu zdarzeniu przyporządkowaliśmy dwa terminy zajścia; najwcześniejszy możliwy i najpóźniejszy dopuszczalny to czynnościom musimy przyporządkować cztery terminy związane z ich zdarzeniami; początkowym i końcowym.

Charakterystyki czasowe rozpoczęcia i zakończenia czynności oraz występujące rezerwy czasowe wyznaczymy następująco:

Najwcześniejszy możliwy termin rozpoczęcia czynności *i-j* wyznacza najwcześniejszy możliwy termin zajścia zdarzenia początkowego tej czynności:

$$t_{ij}^{0p} = T_i^0 \tag{22}$$

Najpóźniejszy dopuszczalny termin rozpoczęcia czynności i–j określony jest przez różnię:

$$t_{ij}^{1p} = T_j^1 - t_{ij} \tag{23}$$

oznacza to, że najpóźniejszy dopuszczalny termin rozpoczęcia danej czynności nastąpi, jeśli czynność ta zakończy się w najpóźniejszym możliwym terminie zajścia jej zdarzenia końcowego i od tego terminu odejmiemy czas jej trwania.

Podobnie ***najwcześniejszy możliwy koniec czynności*** *i-j* wystąpi wtedy, gdy czynność ta rozpocznie się w najwcześniejszym możliwym terminie zajścia jej zdarzenia początkowego zwiększonym o czas jej trwaniz:

$$t_{ij}^{0k} = T_i^0 + t_{ij} \tag{24}$$

Najpóźniejszy ***dopuszczalny termin zakończenia czynności*** *i-j* zbiega się z najpóźniejszym terminem zajścia jej zdarzenia końcowego:

$$t_{ij}^{1k} = T_j^1 \tag{25}$$

Dla każdej czynności możemy wyznaczyć rezerwy czasu wykonania zwane ***zapasami czasu***. Rozróżnia się cztery rodzaje zapasów czasu:

Z_c – zapas całkowity,
Z_s – zapas swobodny,
Z_w – zapas warunkowy,
Z_n – zapas niezależny.

Zapas całkowity $\boldsymbol{Z_c}$ określony jest za pomocą równania:

$$Z_c = T_j^1 - T_i^0 - t_{ij} \tag{26}$$

Stanowi on rezerwę czasu, który może być wykorzystany dodatkowo na wykonanie czynności bez wpływu na termin realizacji projektu.

Zapas swobodny $\boldsymbol{Z_s}$ określony jest równaniem:

$$Z_s = T_j^0 - T_i^0 - t_{ij} \tag{27}$$

wykorzystanie tego zapasu nie ma wpływy na zapasy związane z czynnościami należącymi do danej ścieżki.

Zapas warunkowy Z_w określony jest następująco:

$$Z_w = T_j^1 - T_i^1 - t_{ij} \tag{28}$$

stanowi rezerwę czasu, która może być wykorzystana bez zmniejszenia zapasów poprzednich, określonych dla danej ścieżki.

Zapas niezależny Z_n oblicza się według wzoru:

$$Z_n = T_j^0 - T_i^1 - t_{ij} \tag{29}$$

Wykorzystanie tej rezerwy czasowej nie ma wpływu na zapas jakiejkolwiek innej czynności.

Można wykazać, że dla ***czynności należących do ścieżki krytycznej wszystkie zapasy są równe zeru***. Tym samym wydłużenie jakiejkolwiek czynności krytycznej o jednostkę powoduje opóźnienie realizacji całego projektu o jednostkę. Każde natomiast skrócenie czasu czynności na drodze krytycznej o jednostkę powoduje skrócenie czasu realizacji projektu o jednostkę. Warto zaznaczyć, że w sieci istnieje co najmniej jedna droga krytyczna. Może być ich więcej, jednak ich liczba jest skończona. W skrajnym przypadku może się zdarzyć, że wszystkie ścieżki pełne będą krytycznymi. Ta mało realna sytuacja oznaczałaby konieczność realizacji wszystkich czynności w ściśle określonych terminach i stwarzałaby duże napięcia w realizacji harmonogramu robót. Taki sztywny harmonogram w praktyce jest mało prawdopodobny do zrealizowania.

Na podstawie grafu (rys. 26) podane zostały wyliczone najwcześniejsze możliwe terminy rozpoczęcia, najpóźniejsze dopuszczalne terminy zakończenia poszczególnych czynności oraz został obliczony zapas całkowity Z_c. Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 1.

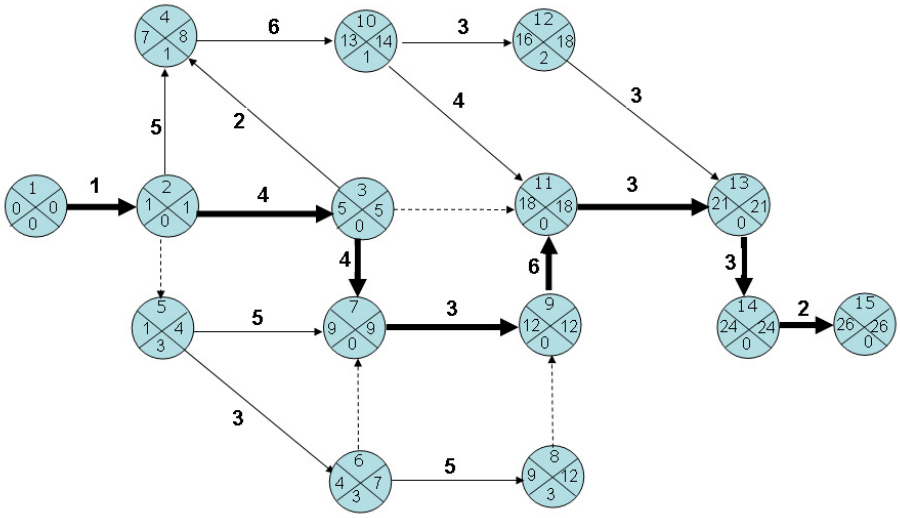
Wyznaczone terminy zajścia zdarzeń, terminy rozpoczęcia i zakończenia czynności składają się na plan wykonania zadań w czasie realizacji przedsięwzięcia zwany harmonogramem.

Z harmonogramu tego wynika, że 1, 2, 3, 7, 9, 11, 13, 14 i 15 są zdarzeniami krytycznymi, bowiem ich luz czasowy jest równy zeru. Drogę krytyczną tworzy ciąg czynności (1–2), (2–3), (3–7), (7–9), (9–11), (11–13), (13–14) i (14–15). Zapasy całkowite dla tych czynności są również zerowe. Przebieg drogi krytycznej w grafie przedstawiony został na rysunku 27.

W analizie drogi krytycznej założyliśmy dla uproszczenia, że termin rozpoczęcia realizacji naszego przedsięwzięcia następuje w dniu zerowym i do tego terminu odnosimy wszystkie inne wyznaczone terminy zdarzeń i czynności. Są to oczywiście terminy umowne. W praktyce inżynierskiej taki harmonogram jest mało przejrzysty. Dlatego rzeczywiste projekty odnosimy zwykle do kalendarza uwzględniającego dni robocze i święta oraz skrócone lub wydłużone dni pracy. Wykorzystanie programów komputerowych do analizy sieciowej przedsięwzięć zostawia ten dylemat programistom, od nich bowiem oczekujemy, by harmonogram opisywał terminy zdarzeń w dniach kalendarzowych.

Tabela 1. Wyniki analizy drogi krytycznej w grafie metodą CPM

Czynność *i-j*	Czas trwania t_{ij}	Początki		Końce		Zapas całkowity Z_c
		najwcześniejszy możliwy	najpóźniejszy dopuszczalny	najwcześniejszy możliwy	najpóźniejszy dopuszczalny	
1–2	1	0	0	1	1	0
2–3	4	1	1	5	5	0
2–4	5	1	3	6	8	2
3–4	2	5	6	8	8	1
3–7	4	5	5	9	9	0
4–10	6	7	8	13	14	1
5–6	3	1	4	7	7	3
5–7	5	1	4	6	9	3
6–8	5	4	7	6	12	3
7–9	3	9	9	12	12	0
9–11	6	12	12	18	18	0
10–11	4	13	14	18	18	1
10–12	3	13	15	18	18	2
11–13	3	18	18	21	21	0
12–13	3	16	18	19	21	2
13–14	3	21	21	24	24	0



Rysunek 27. Przebieg drogi krytycznej w grafie po obliczeniach zapasów czasów dla wszystkich czynności w sieci

4.2. ANALIZA STOCHASTYCZNYCH SIECI ZALEŻNOŚCI (PERT)

Drogę krytyczna w sieciach stochastycznych stanowi również najdłuższy ciąg czynności, prowadzony od zdarzenia początkowego do zdarzenia końcowego. W sieciach węzłowych, typowych dla klasycznej metody PERT, drogę krytyczna wyznaczać będą wierzchołki sieci, czyli zdarzenia, których najwcześniejsze terminy zajścia T_i^0 będą miały te same wartości co terminy najpóźniejsze T_j^1. Dotyczy to wartości średnich zbioru, czyli:

$$\overline{T}_i^0 = \overline{T}_i^1 \tag{30}$$

natomiast wariancje tych zbiorów mogą być różne:

$$\sigma_{oi}^2 \neq \sigma_{li}^2 \tag{31}$$

Droga krytyczna, zgodnie z założeniem, będzie najdłuższą drogą w zbiorze dróg, prowadzących od zdarzenia początkowego $i = 1$ do zdarzenia końcowego $j = n$.

$$\overline{V}_{kr} = max\left\{\sum_{i=1}^{j=n}(P_j - P_i)\right\} \tag{32}$$

gdzie:

P_i i P_j – wierzchołki i i j grafu

Długość drogi krytycznej jest również wartością zmiennej losowej, o wartości średniej $\overline{V}_{kr}$ i wariancji:

$$\sigma_{kr}^2 = \sum_{i=1}^{j-n}\sigma_{ij}^2 \tag{33}$$

Wariancja drogi krytycznej równa się sumie wariancji czynności leżących na tej drodze.

W sieciach stochastycznych istnieje pewne prawdopodobieństwo, że również inne czynności niekrytyczne, prowadzące od zdarzenia początkowego do końcowego, będą mogły stać się drogami krytycznymi, prawdopodobieństwo to będzie jednak mniejsze niż w przypadku drogi krytycznej.

Zgodnie z klasyfikacją modeli sieciowych metoda PERT należy do sieci o zdeterminowanej strukturze logicznej, a ***charakter probabilistyczny*** mają jedynie parametry opisujące czynności (np. czasy trwania, koszty). Czasy trwania poszczególnych czynności t_{i-j} są zmiennymi losowymi, a rozkład prawdopodobieństwa występowania tych różnych czasów trwania podlega rozkładowi beta.

Dla oszacowania każdej czynności potrzebne są trzy oceny czasu jej trwania:

a – czas optymistyczny (czas trwania czynności w najbardziej sprzyjających warunkach),

b – czas pesymistyczny (czas trwania czynności w najmniej sprzyjających warunkach),

m – czas najbardziej prawdopodobny (modalny) (czas, który najczęściej występuje przy wielokrotnym powtarzaniu czynności).

Na podstawie tych trzech ocen oblicza się oczekiwany czas trwania czynności:

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6} \tag{34}$$

oraz wariancję czasu oczekiwanego:

$$\sigma_e^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2 \tag{35}$$

która określa spodziewane odchylenie rzeczywistego czasu trwania czynności od wyznaczonego czasu oczekiwanego.

W metodzie PERT czas trwania projektu wyliczony po ścieżce krytycznej jest wielkością losową, rzeczywisty termin końcowy może się mniej lub bardziej różnić od wyznaczonego na podstawie czasów oczekiwanych w zależności od wielkości wariancji poszczególnych czynności leżących na drodze krytycznej. Stąd wariancja terminu wykonania całego przedsięwzięcia jest sumą wariancji czynności krytycznych.

Znając oczekiwany termin wykonania, wyznaczony po drodze krytycznej oraz jego wariancję, można obliczyć prawdopodobieństwo, że przedsięwzięcie będzie zakończone w pewnym narzuconym z góry (dyrektywnym) terminie $\boldsymbol{T_d}$.

W tym celu oblicza się statystykę $\boldsymbol{x}$ według wzoru:

$$x = \frac{T_d - T_w}{\sqrt{\sigma_{T_w}^2}} \tag{36}$$

gdzie:

$\boldsymbol{T_d}$ – jest narzuconym z góry terminem,

$\boldsymbol{T_w}$ – oczekiwanym terminem wykonania przedsięwzięcia (najwcześniejszym możliwym terminem zajścia zdarzenia końcowego w sieci T^0).

Dla obliczonego współczynnika $\boldsymbol{x}$ z tablic dystrybuanty rozkładu normalnego odczytuje się prawdopodobieństwo dotrzymania narzuconego z góry terminu, tzn.

$$P\{T_d \le T_w\} = \Phi(x) \tag{37}$$

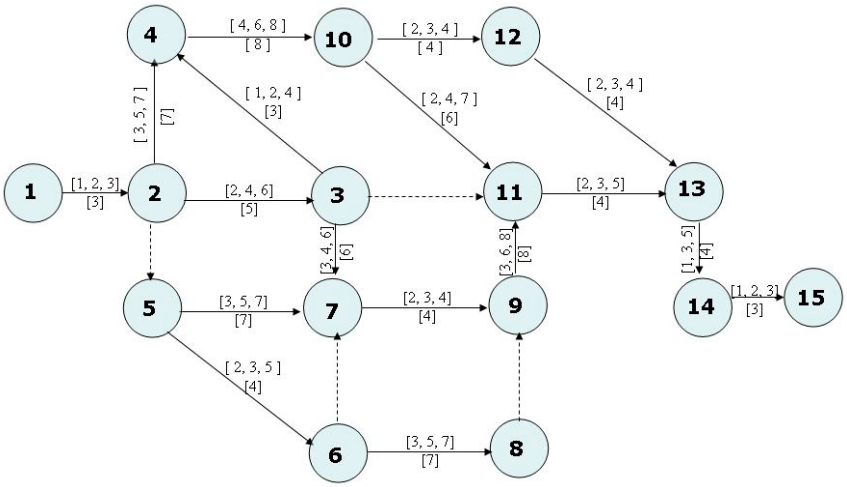
Jeżeli wartości prawdopodobieństwa dotrzymania terminu planowanego znajdują się w granicach od 0,25 do 0,6 to można uznać, że dotrzymanie tego terminu jest realne. Jeżeli jednak $\Phi(x) \leq 0{,}25$ to istnieje znikoma szansa dotrzymania terminu dyrektywnego. Przy wartości $F(x) \geq 0{,}6$ przyjmuje się, że istnieją w całym harmonogramie przedsięwzięcia pewne – niewykorzystane moce przerobowe (nadmiar zasobów siły roboczej, maszyn, urządzeń) do wykonania projektu w terminie dyrektywnym.

Rozważmy jeszcze raz nasze przedsięwzięcie sformułowane w rozdziale poprzednim, zakładając, że czasy trwania poszczególnych czynności są zmiennymi losowymi i nie potrafimy ich jednoznacznie określić. Możemy tylko podać zakładane czasy optymistyczne *b*, pesymistyczne *a* oraz najbardziej prawdopodobne *m*. Pozostałe wartości charakteryzujące czynności w sieciach stochastycznych wyliczymy z zależności (34) i (35). Przyjęte i obliczone parametry naszego przedsięwzięcia zawiera tabela 2.

Tabela 2. Podstawowe charakterystyczne parametry przedsięwzięcia do obliczenia stochastycznej sieci zależności

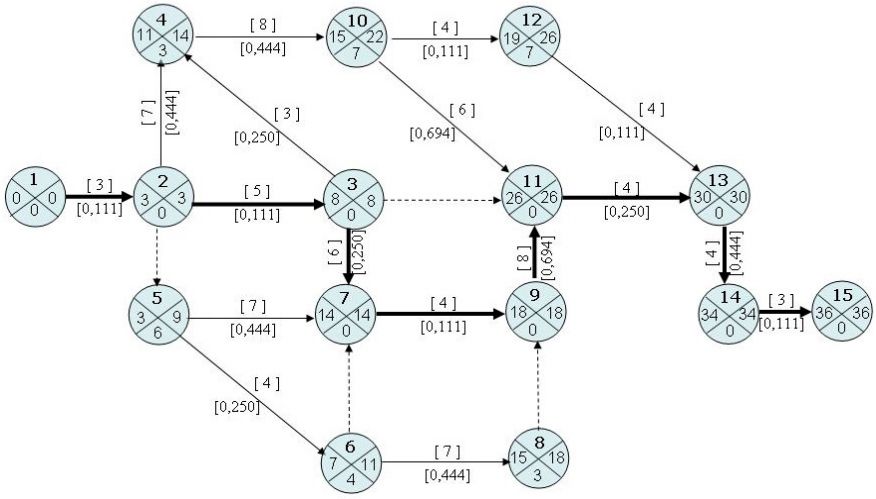
Czynność *i-j*	Czasy trwania w dniach			t_e	σ_{ij}^2
	a	m	b		
1–2	1	2	3	3	0,111
2–3	2	4	6	5	0,444
2–4	3	5	7	7	0,444
3–4	1	2	4	3	0,250
3–7	3	4	6	6	0,250
4–10	4	6	8	8	0,444
5–6	2	3	5	4	0,250
5–7	3	5	7	7	0,444
6–8	3	5	7	7	0,444
7–9	2	3	4	4	0,111
9–11	3	6	8	8	0,694
10–11	2	4	7	6	0,694
10–12	2	3	4	4	0,111
11–13	2	3	5	4	0,250
12–13	2	3	4	4	0,111
13–14	1	3	5	4	0,444
14–15	1	2	3	3	0,111

Dane zawarte w tabeli 2 zostały naniesione na rysunek sieci zależności (rys. 27). Czynności w sieci opisane są na niej czterema parametrami. Nad strzałką podane zostały odpowiednio wartości czasów pesymistycznych, najbardziej prawdopodobnych i optymistycznych, a pod strzałką, w nawiasach prostokątnych wartości czasów oczekiwanych.



Rysunek 28. Stochastyczna sieć zależności PERT

Poniżej (rys. 29) przedstawiono analizę drogi krytycznej przedsięwzięcia, obliczoną na podstawie wartości czasów oczekiwanych. Tym razem wartości czasów oczekiwanych podano nad strzałką, a pod strzałką w nawiasach podane zostały wartości wariancji poszczególnych czynności. W kółkach obrazujących zdarzenia w sieci podano w sieciach deterministycznych najpóźniejszy i najwcześniejszy termin zajścia zdarzeń.



Rysunek 29. Analiza drogi krytycznej w metodzie PERT

Z przeprowadzonej analizy wynika, że oczekiwany czas realizacji przedsięwzięcia (długość drogi krytycznej wyznaczonej po czasach oczekiwanych) wynosi $T^o = T^l = 36$ dni. Wyznaczona według wzoru (33) wariancja dla tego czasu wynosi $\sigma_{kr}^2 = 2{,}087$, stąd spodziewana wielkość odchylenia rzeczywistego terminu wykonania projektu od terminu oczekiwanego (30 dni) wynosi $\sigma_{T_w} = \sqrt{2{,}087} = \pm 1{,}44$ dnia.

Załóżmy, że interesuje nas prawdopodobieństwo dotrzymania skróconego do 30 dni terminu zrealizowania przedsięwzięcia zamiast w wyliczonych 36 dniach.

Obliczmy zatem statystykę ***x*** według zależności (36):

$$x = \frac{T_d - T_w}{\sqrt{\sigma_{T_w}^2}} = \frac{30-36}{1{,}44} = -4{,}166$$

i według zależności (37) odczytajmy z tablic dystrybuanty rozkładu normalnego prawdopodobieństwo dotrzymania narzuconego z góry terminu dyrektywnego, tzn:

$$P\{T_{30} \le T_{36}\} = \Phi(-4{,}166) = 0{,}00001591$$

Ponieważ wartość dystrybuanty rozkładu normalnego $\Phi(x) \le 0{,}25$ – wynosi bowiem 0,00001591, zatem prawdopodobieństwo dotrzymania 30-dniowego terminu realizacji tego przedsięwzięcia jest praktycznie równe zeru.

Gdybyśmy planowali skrócenie czasu ukończenia przedsięwzięcia o dwa dni, a więc w ciągu 34 dni statystyka ***x*** wyniesie:

$$x = \frac{T_{34} - T_{36}}{\sqrt{\sigma_{T_w}^2}} = \frac{34-36}{1{,}44} = -1{,}39$$

stąd prawdopodobieństwa dotrzymania 34-dniowego czasu realizacji całego przedsięwzięcia w tym przypadku wyniesie:

$$P\{T_{32} \le T_{36}\} = \Phi(-1{,}39) = 0{,}0826$$

i jest również zbyt niskie, by można było zakładać realność takiego przyspieszenia.

Prawdopodobieństwo wykonania przedsięwzięcia w ciągu 36 dni zgodnie z wyliczoną drogą krytyczną wynosi:

$$P\{T_{36} \le T_{36}\} = \Phi(0{,}44) = 0{,}3621$$

jest więc większe od wartości $\Phi(x) \le 0{,}25$, można zatem powiedzieć, że prawdopodobieństwo realizacji przedsięwzięcia zgodnie z wyliczoną na podstawie oczekiwanych czasów wykonania poszczególnych czynności jest realne.

5. METODA PLANOWANIA SIECIOWEGO MPM-METRA

W latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku weszła do praktyki organizatorskiej metoda planowania sieciowego MPM (*Metra Potential Metode*). Metoda ta została opracowana we Francji przez B. Roya i rozpowszechniona przez francuskie towarzystwo naukowe SEMA (*Sociètè d'Economie et de Mathèmatique Appliquèes*) należące do międzynarodowego stowarzyszenia naukowego METRA International, zajmującego się badaniami naukowymi i ekspertyzami z dziedziny organizacji pracy, stąd nazwa MPM-METRA.

Metoda planowania sieciowego MPM-METRA jest metodą deterministyczną. W porównaniu z metodą CPM wykazuje ona szereg zalet, jest bowiem prostsza i umożliwiająca przedstawienie nawet bardzo skomplikowanego przedsięwzięcia w postaci graficzno-analitycznej w sposób bardziej czytelny i intuicyjny.

5.1. ZASADY METODY MPM

Istotną cechę metody planowania sieciowego MPM stanowi odmienny sposób przedstawienia grafu sieciowego. Podobnie, jak w innych metodach sieciowych, graf składa się z krawędzi i węzłów, lecz w metodzie MPM-METRA węzły oznaczają czynności, natomiast krawędzie między węzłami, zaopatrzone w strzałki kierunkowe, mają jedynie zadanie porządkujące, wykazują kolejność i współzależność w czasie poszczególnych czynności. Dla odróżnienia grafów sieciowych MPM od innych, węzły sieci, oznaczające czynności, przedstawiamy w postaci prostokątów, wewnątrz których mieszczą się symbolowe i liczbowe oznaczenia informujące o rodzaju czynności prezentowanej przez węzeł. W nawiasach podawane są czasy trwania czynności. Krawędzie łączące węzły w określony logiczny sposób kreślone są zazwyczaj pionowo lub poziomo. Każdy graf sieciowy rozpoczyna się od węzła początkowego, który nie oznacza żadnej czynności i oznaczony jest symbolem START. Czas węzła początkowego jest równy zeru. Od niego liczy się czasy rozpoczęcia i ukończenia poszczególnych czynności.

Dzięki zastosowaniu krawędzi-łuków, ilustrujących powiązania między czynnościami oraz oznaczeń liczbowych nad i pod krawędziami jest możliwe dokładne określenie na wykresie sieciowym terminu rozpoczęcia danej czynności w stosunku do momentu rozpoczęcia czynności bezpośrednio ją poprzedzającej.

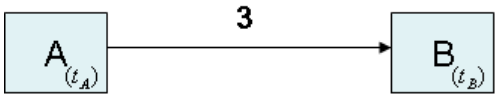
Przyjmijmy następujące zasady oznaczenia łuków:

– wartość dodatnia nad łukiem oznacza najwcześniejszy termin rozpoczęcia czynności następującej, licząc od momentu rozpoczęcia czynności poprzedzającej; oznaczenie: t_B^{0p} – najwcześniejszy termin rozpoczęcia czynności B wobec terminu rozpoczęcia czynności poprzedzającej A,

– wartość ujemna pod łukiem przeciwnym oznacza najpóźniejszy termin rozpoczęcia czynności następującej, licząc od momentu rozpoczęcia czynności poprzedzającej; oznaczenie: t_B^{1p} – najpóźniejszy termin rozpoczęcia czynności B wobec terminu rozpoczęcia czynności poprzedzającej A.

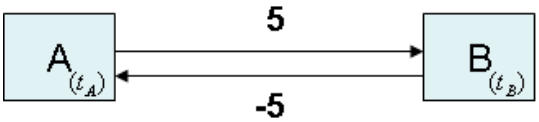
Rozpatrzmy typowe oznaczenia sieciowe MPM.

Najwcześniejszy termin rozpoczęcia czynności B określa się w stosunku do poprzedzającej ja czynności A. Zapis przedstawiony na rysunku 30 oznacza, że czynność B może najwcześniej rozpocząć się w trzecim dniu (jeśli skala czasu oznaczona jest w dniach) od momentu rozpoczęcia czynności A. Czyli $t_B^{0p} = 3$. Jeśli czas trwania czynności A wynosiłby 3 dni czyli $t_A = 3$, wówczas zapis podany na rysunku oznacza, że czynność B rozpoczyna się bezpośrednio po ukończeniu czynności A.



Rysunek 30. Określenie najwcześniejszego terminu rozpoczęcia czynności

Jeśli chcemy dokładnie określić termin rozpoczęcia czynności następującej w odniesieniu do momentu rozpoczęcia czynności poprzedzającej, bez względu na czasy trwania tych czynności, to stosujemy zapis podany na rysunku 31.

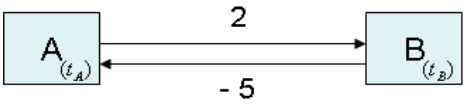


Rysunek 31. Określenie dokładnego terminu rozpoczęcia czynności

Zapis podany na rysunku powyżej oznacza, że czynność B musi rozpocząć się dokładnie w piątym dniu od terminu rozpoczęcia poprzedzającej ją czynności A. Piąty dzień jest najwcześniejszym i jednocześnie najpóźniejszym terminem rozpoczęcia czynności B w stosunku do czynności A:

$$t_B^{0p} = t_B^{1p} = 5.$$

Określenie najwcześniejszego i najpóźniejszego terminu rozpoczęcia czynności w odniesieniu do momentu rozpoczęcia czynności poprzedzającej przedstawia rysunek 32.

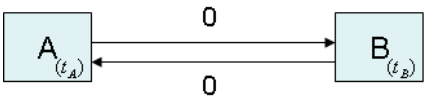


Rysunek 32. Określenie najwcześniejszego i najpóźniejszego terminu rozpoczęcia czynności

Czynność B może się rozpocząć najwcześniej w drugim dniu, ale nie później niż w piątym dniu, licząc od momentu rozpoczęcia czynności A:

$$t_B^{0p} < t_B^{1p}.$$

Jeśli czynność następująca musi rozpocząć się w tym samym momencie co czynność poprzedzająca (rys. 33) oznaczenia tych dwóch krawędzi mają wartość zero:



Rysunek 33. Określenie czynności trwających równolegle (rozpoczynających się w tym samym momencie)

czyli:

$$t_B^{0p} = t_B^{1p} = 0$$

Omawianie pozostałych możliwych kombinacji t_B^{0p} i t_B^{1p} nie jest celowe, ponieważ oznacza faktyczną zmianę kolejności między czynnościami A i B.

Zależności przedstawione powyżej na rysunkach w odniesieniu do czynności B oznaczają:

$t_B^{0p} = t_B^{1p}$ – czynność B musi rozpocząć się punktualnie w oznaczonym czasie;

$t_B^{0p} < t_B^{1p}$ – czynność B może rozpocząć się z opóźnieniem lub trwać dłużej, ma zapas czasu $(t_B^{1p} - t_B^{0p})$;

$t_B^{0p} = t_B^{1p} = 0$ – czynność B musi rozpocząć się równocześnie z poprzedzającą ją czynnością A.

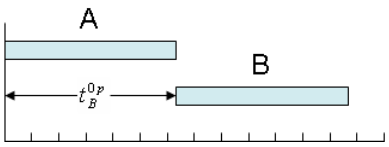
Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami czasy t_{1p} mają wartości ujemne i strzałki skierowane w lewo. Stąd:

$$(t_B^{1p} - t_B^{0p}) \geq 0.$$

Bezwzględna wartość czasu t^{1p} musi być zawsze większa niż t^{0p}, dotyczy to nie tylko relacji dwóch czynności, następujących po sobie, ale również i szeregu złożonego z kilku czynności kolejnych. W sieciach konstruowanych według zasad MPM nie dopuszcza się do powstawania zamkniętych pętli i cykli czynności.

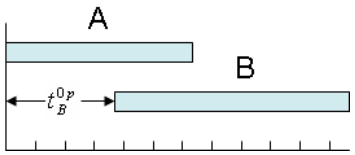
Terminy rozpoczęcia kolejnej czynności B nie są związane lub zależne od czasu trwania poprzedzającej czynności A, można jednak rozróżnić trzy możliwe sytuacje, kiedy czynność B rozpoczyna się:

a) zaraz po ukończeniu czynności A. Wskaźnik najwcześniejszego rozpoczęcia czynności B równa się w tym przypadku długości czasu trwania poprzedzającej czynności A (rys. 34):



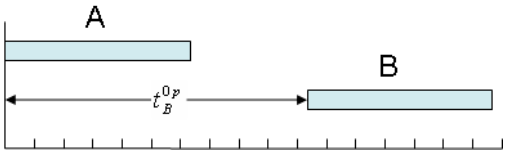
Rysunek 34. Czynność B rozpoczyna się bezpośrednio zakończeniu po czynności A

b) w trakcie trwania czynności A (rys. 34):



Rysunek 35. Czynność B rozpoczyna się po pewnym zaawansowaniu prac związanych z czynnością A

a) po upływie pewnego czasu od zakończenia czynności A (rys. 36):



Rysunek 36. Rozpoczęcie czynności B z opóźnieniem wobec zakończenia czynności A

Grafy sieciowe MPM umożliwiają logiczne przedstawienie, w postaci graficznej, dowolnego procesu pracy. W tym celu proces pracy należy uprzednio rozłożyć na poszczególne czynności, nadając tym czynnościom oryginalne nazwy, umożliwiające identyfikacje ich na grafie. Na wykresie sieciowym czynności przedstawia się w postaci prostokątów i oznacza kolejno symbolami przypisanymi do reprezentujących je czynności.

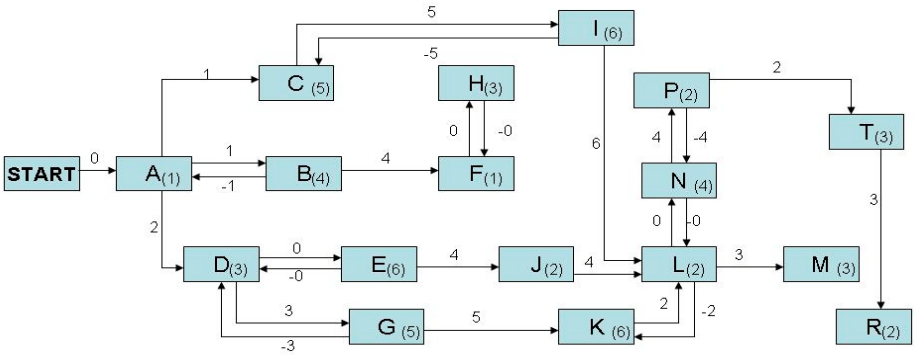
Ponadto należy określić:

– czasy trwania poszczególnych czynności,

– kolejność wykonania poszczególnych czynności, określając czynności poprzedzające, następujące lub wykonywane równocześnie,

– w jakim czasie, licząc od rozpoczęcia poprzedzającej czynności A, można najwcześniej, względnie musi się najpóźniej rozpocząć czynność następującą B i inne czynności następujące.

Informacje te, oparte na znajomości danego procesu technologicznego, stanowią podstawę narysowania grafu sieciowego. Przykład grafu sieciowego według metody MPM-METRA został przedstawiony na rysunku 37. Opracowany został dla przedsięwzięcia przedstawionego już za pomocą harmonogramu Gantta (rys. 17) oraz za pomocą sieci zależności CPM (rys. 21). Czynności są tu oznaczone dużymi literami, zaś podane obok liczby w nawiasach oznaczają czasy trwania poszczególnych czynności. Wskaźniki liczbowe, umieszczone nad krawędziami łączącymi poszczególne czynności podają najwcześniejsze czasy rozpoczęcia następnej czynności, jeżeli grot strzałki skierowany jest w prawo oraz czasy najpóźniejszego rozpoczęcia następnej czynności, gdy grot strzałki skierowany jest w lewo, zaś wartość liczbowa zapisana jest ze znakiem ujemnym. Wartości czasów odnoszą się zawsze do początku rozpoczęcia czynności poprzedzającej.



Rysunek 37. Sieć zależności MPM-METRA dla rozpatrywanego przedsięwzięcia

5.2. ANALIZA GRAFU SIECIOWEGO MPM-METRA

Analiza grafu sieciowego MPM umożliwia określenie wartości:

czasów najwcześniejszych rozpoczęcia t^{0p} i ukończenia t^{0k} czynności:

$$t^{0k} = t^{0p} + t_N \tag{38}$$

czasów najpóźniejszych rozpoczęcia t^{1p} i ukończenia t^{1k} czynności:

$$t^{1k} = t^{1p} + t_N \tag{39}$$

czasów ukończenia całego przedsięwzięcia, zapasów czasu, czyli tolerancji w terminach rozpoczęcia lub ukończenia poszczególnych czynności:

$$Z = t^{1k} - t^{0k} \text{ lub } t^{1p} - t^{0p} \tag{40}$$

ustalenie czynności krytycznych, niewykazujących zapasów czasu, których terminowe rozpoczęcie i ukończenie wpływa na dotrzymanie terminu końcowego całego przedsięwzięcia.

Analizę grafu sieciowego można przeprowadzić graficznie na podstawie rysunku sieci, albo analitycznie, przy użyciu algorytmu macierzowego. Metoda graficzna nie jest trudna, lecz pracochłonna, zwłaszcza w przypadkach, gdy sieć obejmuje większą liczbę czynności. Sposób przeprowadzenia analizy grafu MPM metodą graficzną jest opisany w literaturze[6]. Praktycznie nie ona stosowana w programach liczących więcej niż kilkanaście czynności z uwagi na jej pracochłonność. Dlatego w tym miejscu skoncentrujemy się szerzej na opisaniu metody algorytmicznej na podstawie macierzy incydencji sporządzonej, wykorzystując graf MPM. Macierz taką, sporządzoną na podstawie sieci MPM, przestawionej na rysunku 37, zamieszczono w tabeli 3.

Do poszczególnych pól macierz wpisane zostały oznaczenia łuków, czyli najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy rozpoczęcia czynności. Wiersze oznaczają początek łuku (czynność początkową), kolumny – koniec łuku (czynność końcową).

Przed obliczeniem najwcześniejszych terminów (t_N^{0p}) rozpoczęcia czynności N trzeba wyliczyć wielkości pomocnicze t_N^{0p+} i t_N^{0p-}. Parametr t_N^{0p+} uwzględnia dodatnie relacje występujące między czynnościami. Oblicza się go, korzystając z wyznaczonej wcześniej macierzy, dla każdej czynności, postępując kolumnami od lewej strony w prawo, sumując wartości leżące na skrzyżowaniu danej kolumny z wczesniej obliczonymi wartościami t_N^{0p+}, odpowiadającymi

[6] Opis graficznej metody obliczania sieci MPM-Metra oraz matody algorytmu macierzowego przedstawia St. Bladowski w książce pt. „Metody sieciowe w planowaniu i organizacji pracy" PWE Warszawa 1970. Metoda algorytmiczna jest również opisana przez M. Trockiego i współautorów. w „Zarządzaniu projektami" PWE Warszawa 2003.

czynności zapisanej w tym samym wierszu co wartość liczbowa w rozpatrywanej kolumnie. Jeżeli w kolumnie znajduje się kilka wartości liczbowych w różnych wierszach, to należy wykonać dodawanie dla wszystkich tych wierszy, a dla danej czynności przyjąć wartość t_N^{0p+}, odpowiadającą największej z obliczonych wartości. Dla czynności początkowej ST przyjmuje się wartość $t_{ST}^{0p+} = 0$.

Tabela 3. Macierz relacji czasowych pomiędzy czynnościami wchodzącymi w skład przedsięwzięcia przedstawionego na rysunku 37

	ST	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	N	M	P	T	R
ST	0	0																
A			1	1	2													
B		-1					4											
C										5								
D						0		3										
E					0						4							
F									0									
G					-3							5						
H							0											
I				-5									6					
J													4					
K													2					
L												-2		0	3			
N													0			4		
M																		
P														-4			2	
T																		3
R																		

Obliczenia t_N^{0p+} dla czynności wychodzących w skład analizowanego przedsięwzięcia wyglądają następująco:

–	dla czynności:	ST	–	0+0=0		
–	dla czynności	A	–	0+0=0	poprawka	-1+1=0
–	dla czynności	B	–	1+0=1		
–	dla czynności	C	–	1+0=1	poprawka	-5+6=1
–	dla czynności	D	–	1+0=1	poprawka	-3+5=2 0+1=1
–	dla czynności	E	–	0+1=1		
–	dla czynności	F	–	4+1=5		
–	dla czynności	G	–	3+1=4		
–	dla czynności	H	–	0+5=5		
–	dla czynności	I	–	5+1=6		

–	dla czynności	J	–	4+1=5		
–	dla czynności	K	–	5+4=9 6+6=12	poprawka	-2+12=10
–	dla czynności	L	–	4+5=9 2+10=12	poprawka	0+12=12
–	dla czynności	N	–	0+12=12		
–	dla czynności	M	–	3+12=15		
–	dla czynności	P	–	4+12=16		
–	dla czynności	T	–	2+16=18		
–	dla czynności	R	–	3+18=21		

Do dalszych obliczeń przyjęto największe z wyliczonych wartości, uwzględniając również wyliczoną poprawkę z uwagi na ujemne relacje t_N^{0p-} między czynnościami.

Obliczone wartości naniesiono na macierz przedsięwzięcia. Macierz ta została przedstawiona w tabeli 4.

Tabela 4. Macierz przedsięwzięcia z obliczeniami t_N^{0p}

	ST	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	N	M	P	T	R	t_N^{0p+}	t_N^{0p-}	t_N^{0p}
ST	0	0																	0		0
A			1	1	1														0		0
B		-1					4												1	0	1
C										5									1	1	1
D						0		3											1	2	2
E					0						4								2		2
F									0										5	5	5
G					-3							5							5		5
H							0												5		5
I				-5									6						6		6
J													4						6		6
K													2						10	10	10
L												-2		0	3				12		12
N													0			4			12	12	12
M																			15		15
P														-4			2		16		16
T																		3	18		18
R																			21		21

Wartość t_N^{0p} dla każdej czynności wyznacza się poprzez przyjęcie większej z obu obliczonych wartości t_N^{0p+} lub t_N^{0p-}.

W celu obliczenia najpóźniejszych terminów rozpoczęcia czynności *N* *(*t_N^{1p}*)*, wchodzących w skład analizowanego przedsięwzięcia należy się posłużyć

tą samą macierzą incydencji, uzupełnioną o kolumnę t_N zawierającą dodatkowo czasy trwania poszczególnych czynności oraz przygotowane do obliczeń wiersze t_N^{1p+}, a także t_N^{1p-}.

Przed obliczeniem najpóźniejszych terminów rozpoczęcia czynności N (t_N^{1p}) trzeba wyznaczyć, jak uprzednio, wielkości pomocnicze t_N^{1p+} oraz t_N^{1p-}. Parametr t_N^{1p+} uwzględnia dodatnie relacje występujące miedzy czynnościami. Obliczenia rozpoczyna się od wpisania w polach macierzy leżących na przecięciu wierszy t_n^{1p+} oraz t_N^{1p} z kolumną t_N terminu zakończenia przedsięwzięcia, będącego największą z sum czasu trwania danej czynności i jej najwcześniejszego czasu rozpoczęcia, czyli $t_n^{0p} + t_N$.

Dalsze obliczenia przeprowadza się wierszami, począwszy od wiersza dolnego, przez odejmowanie:

– od terminu realizacji przedsięwzięcia czsu trwania czynności, dla której obliczana jest bieżąca wartość t_N^{1p+},

– od obliczonego wcześniej terminu t_N^{1p+}, odpowiadającego czynności zapisanej w tej samej kolumnie co dodatnia wartość liczbowa znajdująca się w analizowanym wierszu, tę właśnie wartość; jeżeli w wierszu jest zapisane kilka wartości dodatnich – w różnych kolumnach – to opisane odejmowanie przeprowadza się dla wszystkich kolumn.

Jako najpóźniejszy termin rozpoczęcia czynności t_N^{1p+} przyjmuje się najmniejszą z różnic obliczonych powyższą metodą.

Macierz projektu uzupełniona o dodatkowe kolumny zamieszczona została w tabeli 5.

W dalszej kolejności wyznacza się parametr t_N^{1p-} uwzględniający tylko ujemne relacje między czynnościami. Oblicza się go analogicznie do parametru t_N^{1p+}, korzystając jedynie z ujemnych wartości liczbowych macierzy. Obliczenia przeprowadza się wierszami, począwszy od wiersza dolnego, przez odejmowanie od terminu t_N^{1p+} obliczonego wcześniej, odpowiadającego czynności zapisanej w tej samej kolumnie co ujemna wartość liczbowa znajdująca się w analizowanym wierszu, tę właśnie wartość. Jeżeli w wierszu znajduje się więcej wartości ujemnych – w różnych kolumnach – to przeprowadza się odejmowanie dla wszystkich kolumn.

Czas realizacji całego projektu wynosi 23 dni, ponieważ dla czynności R suma czasu jej trwania oraz terminu jej rozpoczęcia wynosi: $t_R^{0p} + t_R = 21 + 2 = 23$.

Tabela 5. Macierz projektu z wyznaczonymi najwcześniejszymi terminami rozpoczęcia i ukończenia czynności

	ST	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	N	M	P	T	R	t_N	t_N^{0p}	$t_N^{0p}+t_N$
ST	0	0																	0	0	0
A			1	1	1														1	0	1
B		-1					4												4	1	5
C										5									5	1	6
D						0		3											3	2	5
E					0														6	2	8
F									0										1	5	6
G					-3							5							5	5	10
H							0												3	5	8
I				-5									6						6	6	12
J													4						2	6	8
K													2						6	10	16
L												-2		0	3				3	12	15
N													0			4			4	12	16
M																			3	15	18
P														-4			2		2	16	18
T																		3	3	18	21
R																			2	21	23
t_N^{1p+}	0	0	2	1	2	13	6	5	20	6	8	10	12	12	20	16	18	21	23		
t_N^{1p-}			1			2		5	6	6			8	12		16					
t_N^{1p}	0	0	2	1	2	2	6	5	6	6	8	10	8	12	20	16	18	21			

Obliczenia t_N^{1p+} oraz t_N^{1p-} dla wszystkich czynności wchodzących w skład analizowanego przedsięwzięcia wyglądają następująco:

– dla czynności	R	–	23-2=21		
– dla czynności	T	–	23-3=20 lub **21-3= 18***		
– dla czynności	P	–	23-2=21 lub **18-2=16***	popr.	16
– dla czynności	M	–	23-3=20		
– dla czynności	N	–	23-4=19 lub **16-4=12***	popr.	12
– dla czynności	L	–	23-3=20 lub 20-3=17 lub **12-0=12***	popr.	12
– dla czynności	K	–	23-6=17 lub **12-2=10***		
– dla czynności	J	–	23-2 lub **12-4=8***		
– dla czynności	I	–	23-6=17 lub **12-6=6***	popr.	6
– dla czynności	H	–	23-3=20	popr.	6
– dla czynności	G	–	23-5=18 lub **10-5=5***	popr.	5
– dla czynności	F	–	23-1=22 lub **6-0=6***		
– dla czynności	E	–	23-6=17	popr.	2*
– dla czynności	D	–	23-3=20 lub **5-3=2*** lub 2-0=2		
– dla czynności	C	–	23-5=18 lub **5-3=2***		
– dla czynności	B	–	23-4=19 lub 6-4=2	popr.	1*
– dla czynności	A	–	23-1=22 lub 2-1=1 lub **1-1=0*** lub 2-1=1		
– dla czynności	ST	–	23-0=23 lub **0-0=0***		

Do dalszych obliczeń przyjęto wartości oznaczone pogrubioną czcionką i symbolem gwiazdki – jako wartości najmniejsze – uwzględniając również wyliczoną poprawkę z uwagi na relacje ujemne t_N^{1p-} między czynnościami.

Po dokonaniu uprzednich obliczeń jest możliwe wyznaczenie:
najwcześniejszych terminów zakończenia czynności: $t_N^{0k} = t_N^{0p} = t_N$,
najpóźniejszych terminów zakończenia czynności: $t_N^{1k} = t_N^{1p} + t_N$,
zapasy czasu dla poszczególnych czynności: $Z_N = t_N^{1k} - t_N^{0k}$ lub $Z_N = t_N^{1p} - t_N^{0p}$.

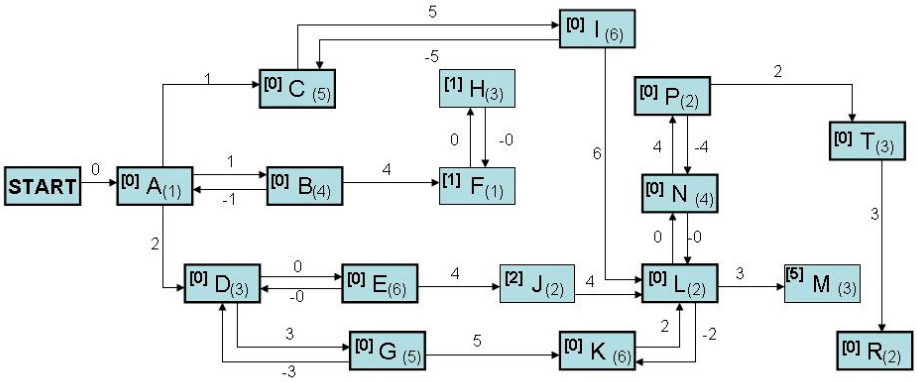
Czynności, dla których zapas czasu jest równy zeru, są czynnościami krytycznymi. Opóźnienia w ich realizacji spowodują opóźnienie zakończenia całego przedsięwzięcia.

Wyniki obliczeń terminów zakończenia czynności, zapasów czasu i wskazanie czynności krytycznych zawarto w tabeli 6.

Graf MPM z zaznaczonymi czynnościami krytycznymi oraz zapasami czasu dla czynności niekrytycznych zaznaczono na rysunku 38. W prostokątach oznaczających czynności w lewych górnych rogach, w nawiasach prostokątnych podano wartości wyliczonych zapasów czasu Z_N. Czynności, dla których zapas czasu jest równy zeru, są czynnościami krytycznymi i zaznaczone są na rysunku pogrubioną linią.

Tabela 6. Obliczenie zapasów czasu i czynności krytycznych

Czynność	Czas trwania czynności	Najwcześniejsze		Najpóźniejsze		Z_N
		początki	końce	początki	końce	
	t_N	t_N^{0p}	t_N^{0k}	t_N^{1p}	t_N^{1k}	
A	0	1	0	1	0	0
B	1	1	5	1	5	0
C	5	1	6	1	6	0
D	3	2	5	2	5	0
E	6	2	8	2	8	0
F	1	5	6	6	7	1
G	5	5	10	5	10	0
H	3	5	8	6	9	1
I	6	6	12	6	12	0
J	2	6	8	8	10	2
K	6	10	16	10	16	0
L	2	12	14	12	14	0
N	4	12	16	12	16	0
M	3	15	18	20	23	5
P	2	16	18	16	18	0
T	3	18	21	18	21	0
R	2	21	23	21	23	0



Rysunek 38. Czynności krytyczne i zapasy czasu dla analizowanego przedsięwzięcia

Metody sieciowe MPM-METRA stanowią wygodną formę graficznej i analitycznej analizy organizacyjnej przedsięwzięć. Pod pewnym względem są wygodniejsze od metody CPM/CPA, wymagają bowiem mniejszej ilości węzłów i krawędzi do określenia grafu sieciowego przedsięwzięcia, nie mają czynności pozornych, co znacznie upraszcza konfigurację grafu sieciowego i jego rozwiązanie. Do najważniejszych zalet metody MPN można zaliczyć:

– przydatność tej techniki w zarządzaniu dużymi projektami,

– przejrzystą koncepcję i nieduże skomplikowanie matematyczne obliczenia,

– graficzną prezentację w postaci wykresu sieciowego, umożliwiającą szybką identyfikację wzajemnych relacji między czynnościami,

– możliwość ustalenia czynności krytycznych oraz sprawdzenia, kiedy dane przedsięwzięcie zostanie ukończone,

– wyodrębnienie czynności niekrytycznych, które dysponują pewną rezerwą czasową i mogą być wykonywane z pewnym opóźnieniem bez uszczerbku dla terminu całego przedsięwzięcia,

– w dowolnym momencie w trakcie realizacji projektu możliwe jest sprawdzenie, czy jest on realizowany zgodnie z terminarzem, czy ma ewentualne opóźnienia.

Techniki MPM mają również swoje wady w stosunku do metod CPM/CPA, z których najistotniejsze to:

– MPM nie jest techniką podejmowania decyzji optymalnych, ponieważ decyzja o podjęciu przedsięwzięcia już zapadła,

– czynności muszą być jednoznacznie zdefiniowane, a zależności między nimi stałe, co powoduje, że sieć jest sformalizowana i utrudnia elastyczne reagowanie na zmiany sytuacji podczas realizacji zadania,

– projekty przedsięwzięć, zwłaszcza bardzo złożonych, podlegają zmianom wraz z postępem realizacji, dlatego siec zbudowana na początku przystępowania do realizacji projektu, po jakimś czasie może go już nie reprezentować,

– nie wszystkie zależności między czynnościami dają się określić z góry, w praktyce pewne sekwencje działań mogą być zmienione.

6. TECHNIKI OPTYMALIZACYJNE NA SIECIACH

6.1. TECHNIKA PLANOWANIA ZASOBÓW OPARTA NA METODZIE CPM

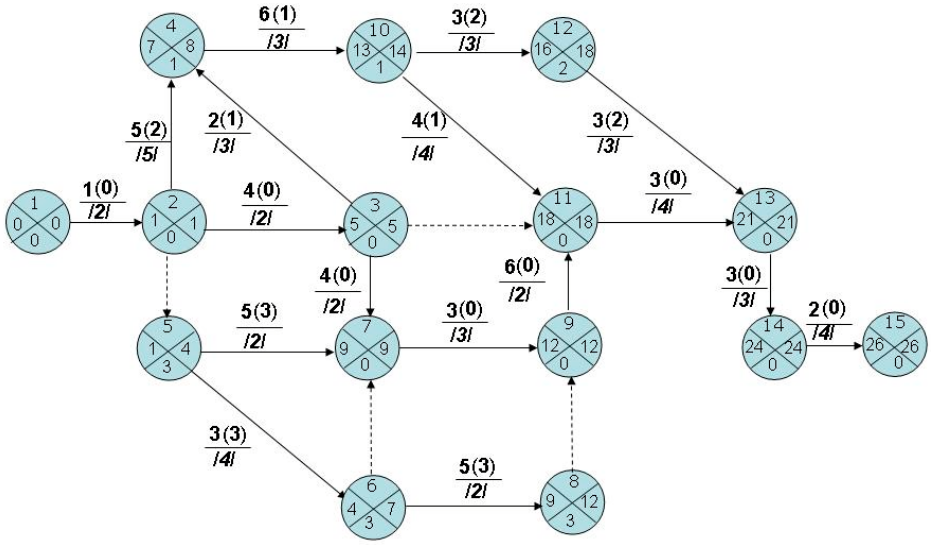
Oprócz kontroli czasu i określenia przebiegu drogi krytycznej technika CPM może być wykorzystywana do optymalizacji wykorzystania ograniczonych zasobów oraz kontroli kosztów wykonania przy różnych czasach realizacji przedsięwzięcia. Metoda CPM może być wykorzystana do analizy i optymalizacji środków produkcji użytych do wykonywania poszczególnych czynności w grafie np. zatrudnienie, środki finansowe, transportowe itp. Do tego celu służy wykres wykorzystania zasobów (WWZ), który pozwala optymalizować stopień zaangażowania zasobów w trakcie realizacji przedsięwzięcia. Możliwości optymalizacyjne wynikają z rezerw czasowych, jakie mają poszczególne, niekrytyczne czynności w sieci.

Technika sporządzania wykresu wykorzystania zasobów polega na wykonaniu następujących kroków:

1. Sporządzenie wykresu sieciowego uzupełnionego o dane dotyczące wykorzystania zasobów, wyznaczenie czynności krytycznych oraz terminów rozpoczęcia i zakończenia czynności niekrytycznych.
2. Sporządzenie harmonogramu Gantta dla najwcześniejszych możliwych terminów rozpoczęcia czynności.
3. Sporządzenie wykresu wykorzystania zasobów dla najwcześniejszych terminów rozpoczęcia czynności.
4. Sporządzenie harmonogramu dla najpóźniejszych dopuszczalnych terminów rozpoczęcia czynności.
5. Wykonanie wykresu wykorzystania zasobów dla najpóźniejszych dopuszczalnych terminów rozpoczęcia czynności.
6. Wyrównanie wykresu, zgodnie z przyjętymi ograniczeniami zasobów w ramach dysponowanych zapasów czasu Z_c dla czynności nieleżących na drodze krytycznej.

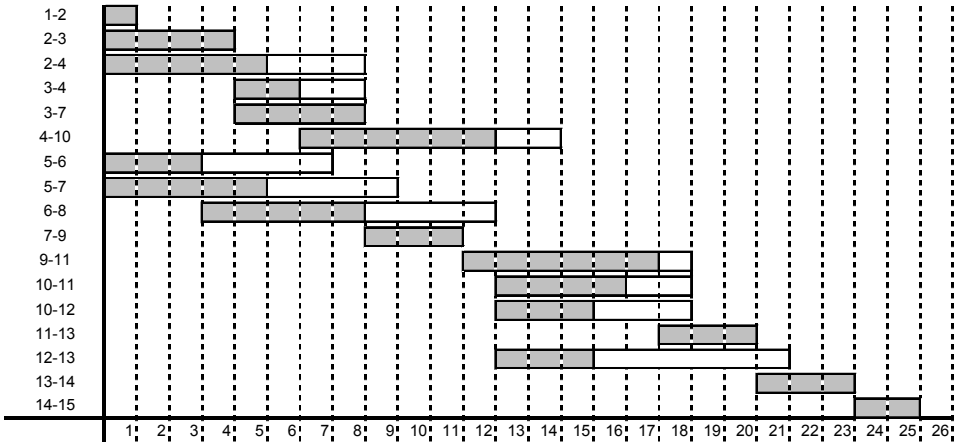
Poniżej na rysunku obliczonej sieci zależności zaznaczono obok czasu trwania poszczególnych czynności ich zapasy czasu oraz pod kreską – wysokość zasobu, który angażuje każda czynność.

Należy tak zaplanować przebieg realizacji poszczególnych etapów projektu, aby w żadnym momencie jego realizacji nie przekroczyć maksymalnego limitu przyznanych środków (np. finansowych). Czy możliwe jest takie zaplanowanie przebiegu projektu, aby do jego realizacji wystarczyła linia kredytowa w wysokości 13 000 złotych?



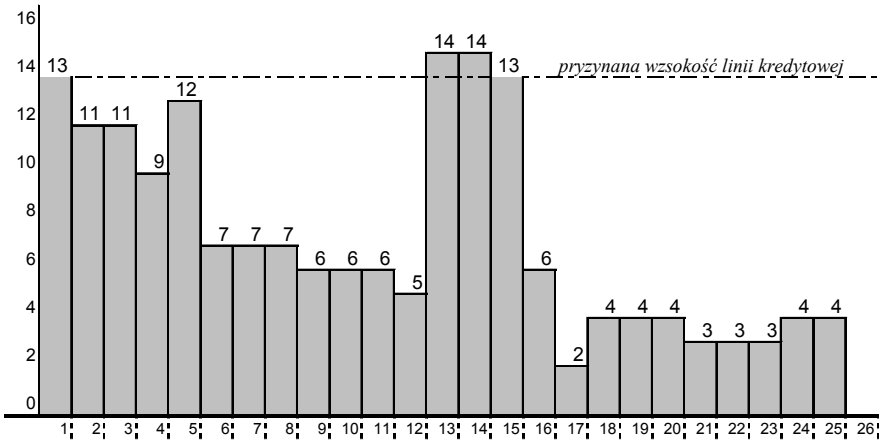
Rysunek 39 . Sieć zależności CPM przygotowana do analizy zasobów

Dane z sieci zależności przedstawiono w postaci harmonogramu, który został wykreślony dla najwcześniejszych możliwych terminów rozpoczęcia poszczególnych czynności T_i^0, harmonogram ten zamieszczono na rysunku 40. Należy zauważyć, że na tym etapie nie wykorzystuje się rezerw czasowych, jakie posiadają czynności niekrytyczne.

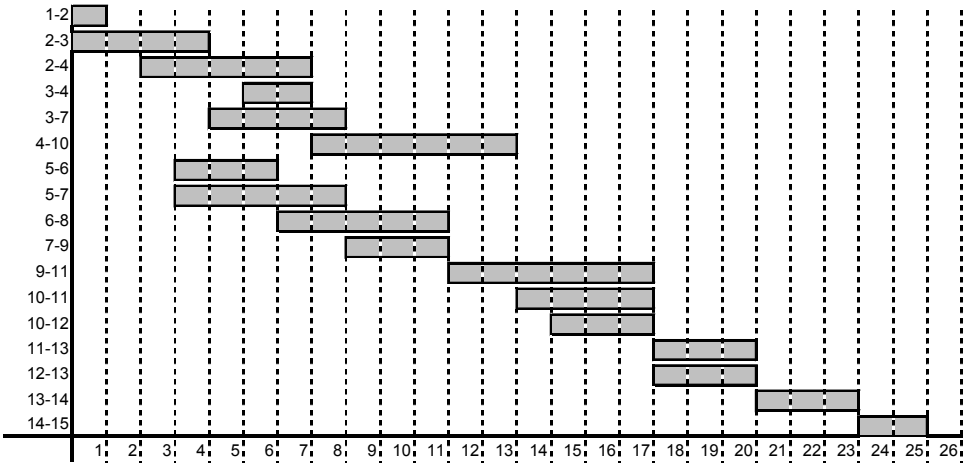


Rysunek 40. Harmonogram realizacji przedsięwzięcia
według najwcześniejszych możliwych terminów rozpoczęcia czynności

Na harmonogram najwcześniejszych możliwych terminów (rys. 40) nanosi się dane dotyczące zasobów i przedstawia się je graficznie w postaci wykresu wykorzystania zasobów (rys. 39). Z wykresu tego wynika, że minimalna wielkość linii kredytowej, niezbędnej do obsługi przedsięwzięcia, przy założeniu rozpoczęcia realizacji wszystkich czynności w najwcześniejszych możliwych terminach wynosi 14 000 złotych, czyli przekracza wielkość 13 000 zł przyznanych środków.



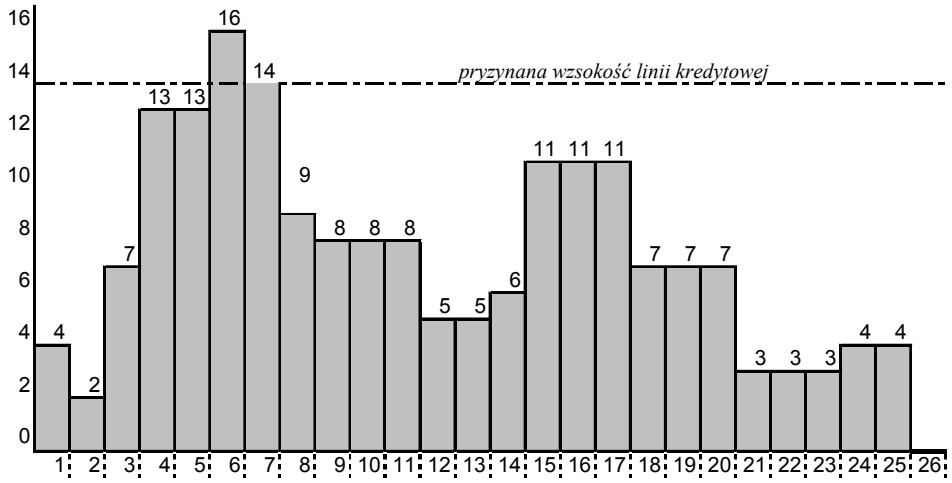
Rysunek 41. Wykres zużycia zasobów przy realizacji według najwcześniejszych możliwych terminów rozpoczęcia czynności



Rysunek 42. Harmonogram realizacji przedsięwzięcia według najpóźniejszych dopuszczalnych terminów rozpoczęcia czynności

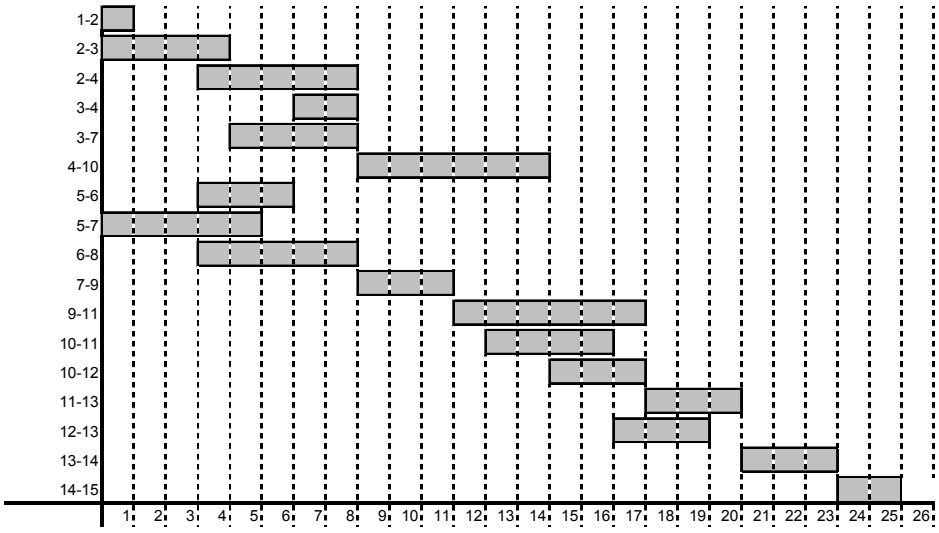
Ponownie sporządza się harmonogram na podstawie sieci zależności – tym razem dla najpóźniejszych dopuszczalnych terminów zakończenia czynności; wszystkie rezerwy czasy w pełni wykorzystane (rys. 42).

Na harmonogram najpóźniejszych dopuszczalnych terminów nanosi się dane dotyczące zasobów i przedstawia graficznie. Z zakresu wykorzystania zasobów dla najpóźniejszych dopuszczalnych terminów wynika, że minimalna wielkość linii kredytowej niezbędnej do obsługi przedsięwzięcia wynosi 13 000 zł i jest w dalszym ciągu mniejsza do wartości uzyskanej dla najpóźniejszych dopuszczalnych terminów rozpoczęcia poszczególnych czynności. Maksymalna wielkość wymaganych zasobów w tym przypadku wynosi 16 000 zł.

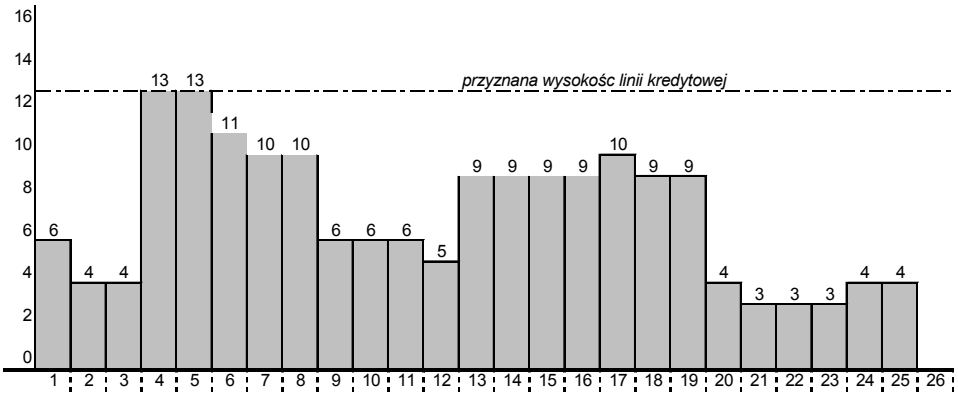


Rysunek 43. Wykres zużycia zasobów przy realizacji według najpóźniejszych dopuszczalnych terminów rozpoczęcia czynności

Dzięki przesunięciu czynności niekrytycznych w ramach posiadanego przeze nie zapasu czasu udało się zmniejszyć zapotrzebowanie na zasoby finansowe w trakcie realizacji przedsięwzięcia poprzez rozłożenie zapotrzebowania bardziej równomiernie. Harmonogram realizacji przedsięwzięcia w optymalnych terminach rozpoczęcia czynności przedstawiono na rysunku 44, a wykres zużycia zasobów przy tych terminach przedstawia rysunek 45.



Rysunek 44. Harmonogram realizacji przedsięwzięcia według optymalnego wykorzystania zasobów



Rysunek 45. Wykres optymalnego wykorzystania zasobów przedsięwzięcia

6.2. ANALIZA PRZEPŁYWU W SIECIACH. ALGORYTM FORDA-FULKERSONA

W rozdziale tym skoncentrujemy swoją uwagę na sterowaniu przepływem jednorodnego produktu od wytwórców do konsumentów, przy ograniczeniach wynikających z przepustowości istniejącej sieci dróg, lub dopuszczalnej ładowności środków transportowych. Będzie to więc typowa analiza logistyczna, polegająca na ustaleniu maksymalnego przepływu towarów w istniejącej sieci transportowej. Rozważmy na przykład problem dystrybucji jabłek od produ-

centów, poprzez specjalistyczne chłodnie i sortownie do hurtowni, a z nich do odbiorców detalicznych. Powiązanie między producentami a odbiorcami jest przedstawione za pomocą sieci transportowej. Zagadnienie sterowania dystrybucją jednorodnego produktu, przy różnych kryteriach optymalizacji, można sprowadzić do problemu przepływów w sieciach. Nasze zainteresowania skupimy na tzw. problemie maksymalnego przepływu.

6.2.1. Sformułowanie problemu dystrybucji w ograniczonej sieci transportowej

Sformułujmy problem dystrybucji płodów rolnych od producentów do konsumentów następująco. Zespoły producentów płodów rolnych (np. jabłek, truskawek, porzeczek itp.) rozprowadzają swoje produkty do konsumentów poprzez sieć hurtowni, zgłaszających określone zapotrzebowania. Produkty te podlegają procesowi standaryzacji w przechowalniach o możliwościach sortowania i przechowywania określonych ilości surowca. Poszczególne przechowalnie rozprowadzają produkty zgodnie z zapotrzebowaniem zgłaszanym przez hurtownie wykorzystując istniejącą sieć dróg (np. kolejowych, lotniczych, morskich) Przepustowość tej sieci charakteryzowana może być przez określoną dopuszczalną ładowność kursujących środków transportu, ograniczenia przedmości, natężenia ruchu itp.

Należy znaleźć maksymalną ilość towaru, np. jabłek, jaką można dostarczyć, wykorzystując istniejącą sieć transportową – tak by zaspokoić zapotrzebowania zgłoszone przez poszczególne hurtownie w ramach zdolności produkcyjnych przechowalni.

Zdolności produkcyjne przechowalni oraz zapotrzebowania na produkty zgłaszane przez poszczególne hurtownie przedstawiają się następująco:

Producenci jabłek mają do dyspozycji cztery (A,B,C,D) przechowalnie-sortownie, które są w stanie przyjąć i przetworzyć określone ilości ton jabłek. Do przechowani tych zgłaszają swoje zapotrzebowania hurtownie (E,F,G,H) o określonych możliwościach zbytu każda. Pomiędzy przechowalniami a hurtowniami istnieje pewna sieć połączeń komunikacyjnych o określonej maksymalnej przepustowości, wynikającej z ładowności środków transportowych obsługujących poszczególne połączenia.

Możliwości przechowywania i sortowania jabłek w poszczególnych przechowalniach oraz zgłaszany popyt przez hurtownie przedstawiają się następująco:

A – 120 t	E – 100 t
B – 100 t	F – 80 t
C – 100 t	G – 90 t
D – 100 t	H – 150 t

Ponieważ suma zdolności produkcyjnych jest w tym przypadku równa zgłaszanemu popytowi, więc możliwości zaspokojenia popytu mogą być ograniczone tylko przepustowością sieci transportowej na poszczególnych jej odcinakach. W tabeli 7 przedstawiono przepustowości transportowe poszczególnych możliwych połączeń między producentami a odbiorcami towarów.

Tabela 7. Tabela powiązań transportowych przechowalni i hurtowni

		Hurtownie			
		E	F	G	H
Przechowalnie	A	70	30	20	0
	B	50	40	10	0
	C	0	20	40	80
	D	0	20	40	80

Z tabeli powiązań (incydencji) wynika, że przechowalnie A i B mogą zaopatrywać hurtownie E, F i G, ponieważ nie istnieje bezpośrednie połączenie tych przechowalni z hurtownią H. Również nie ma połączenia hurtownia E z przechowalniami C i D.

Zadanie nasze polega na znalezieniu takiego systemu realizacji zamówień, aby zmaksymalizować wielkości dostaw (w maksymalnym stopniu zaspokoić popyt).

Na podstawie przedstawionej macierzy incydencji można wykreślić graf sieciowy, obrazujący możliwe ***powiązania*** transportowe i ***przepustowość*** poszczególnych ***kanałów*** według następujących zasad:

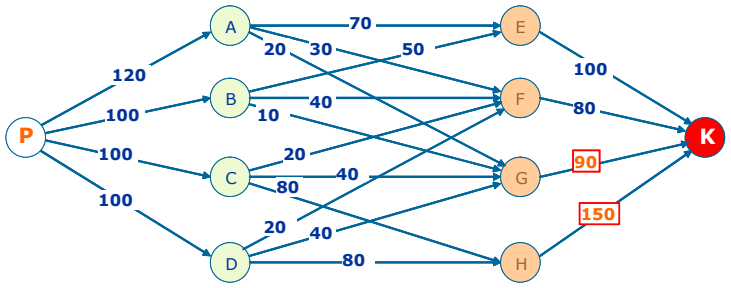
Każdy wierzchołek grafu oznaczający przechowalnię łączymy z wierzchołkami przeznaczenia (hurtownią) za pomocą skierowanego odcinka (wektora), który nazwiemy kanałem. Wektor ten (krawędź grafu) oznaczymy liczbą określającą przepustowość kanału.

Wierzchołek początkowy P, oznaczający producentów łączymy z wierzchołkami oznaczającymi przechowalnie za pomocą krawędzi oznaczonej liczbą określającą zapas zmagazynowany w przechowalniach.

Każdy wierzchołek oznaczający hurtownię łączymy z wierzchołkiem końcowym (odbiorcami detalicznymi) za pomocą kanału oznaczonego liczbą, określającą ilość zamówionego produktu przez określoną hurtownię.

Aby nieco pogłębić nasz problem możemy założyć, że niektóre zamówienia mają pierwszeństwo. Na przykład 80 t przeznaczonych do hurtowni F i 150 t przeznaczonych do hurtowni H musi być zrealizowane w całości.

Skonstruowany według powyższych zasad graf sieciowy z wyróżnionymi kanałami, dla których przypisaliśmy (liczby umieszczone w ramkach) priorytet dostaw przedstawiono na rysunku 46.



Rysunek 46. Graf przedstawiający sieć transportową

Zadanie nasze polega więc na znalezieniu maksymalnej ilości towaru, jaki może być przetransportowany od producentów do konsumentów, w warunkach ograniczonej przepustowości sieci transportowej – od węzła początkowego do węzła końcowego – czyli na znalezieniu ***maksymalnego strumienia przepływu.***

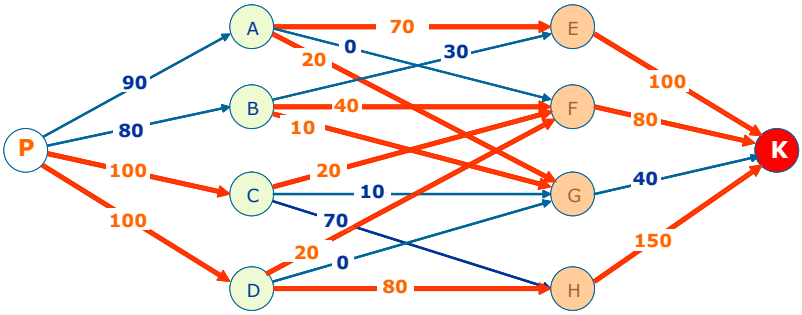
Postępowanie rozpoczynamy od zbadania dowolnie przyjętego strumienia – czy istnieje dla niego droga niezawierająca żadnego ***kanału nasyconego.***

Jeżeli tak, zwiększamy strumień na tej drodze o jednostkę i ponownie wykonujemy poprzednie badanie. Postępowanie prowadzimy aż do chwili, gdy każda droga tego samego strumienia zawierać będzie co najmniej jeden *kanał nasycony.*

Kanał nasycony jest to kanał, którego chwilowa przepustowość równa jest ***przepustowości maksymalnej*** podanej w tabeli 7.

Nasyćmy najpierw drogi zamówień, które mają pierwszeństwo realizacji – czyli zamówienie hurtowni H i zamówienie hurtowni F. Aby wykonać zamówienie hurtowni H, nasycamy kanał *HK.* Przyporządkujmy drodze *PDHK* strumień 80 (nasycający *DH*), a drodze *PCHK* strumień 70 nasycający tylko kanał *HK.*

Postępując w ten sposób dalej, otrzymamy poniższy graf (jako jedna z możliwości). Kanały nasycone oznaczone zostały podwójną strzałką.



Rysunek 47. Przykład rozwiązania nieoptymalnego

Łatwo sprawdzić, że nie ma drogi, która by nie miała co najmniej jednego kanału nasyconego oraz, że całkowity strumień wchodzący do danego węzła jest równy strumieniowi wychodzącemu z tego węzła.

Przy takim rozwiązaniu zamówienia hurtowni E, F, H są wykonane, natomiast zamówienie hurtowni G nie.

Należy zatem spróbować poprawić strumień wyjściowy. Oznaczmy cechą *(+)* wierzchołek początkowy *P* oraz cechą *(+P)* wierzchołki połączone z *P* kanałem nienasyconym. W rozważanym przypadku cechujemy wierzchołki A i B.

W ogólnym przypadku – jeśli przez *(+)* cechujemy wierzchołek X, to przez (+X) cechujemy wierzchołki, które są połączone z wierzchołkiem X kanałem nienasyconym wychodzącym z X, a przez (–X) wierzchołki, z których wychodzą kanały skierowane do X i przenoszące ***strumień niezerowy***.

Jeżeli tego typu postępowanie doprowadzi do oznaczenia węzła K (końcowego), to strumień nie jest maksymalny.

W naszym przykładzie oznaczamy:

A i B przez (+P) – kanały *PA* i *PB* są nienasycone

oraz

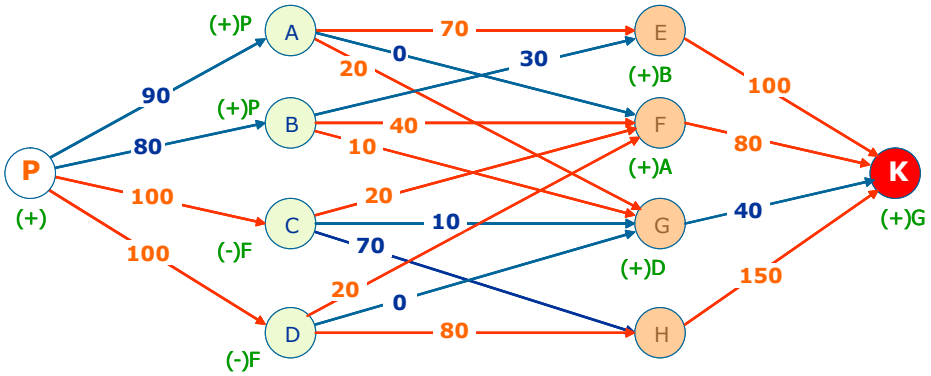
F przez *(+A)* – kanał *AF* nienasycony,

E przez *(+B)* – kanał *BE* nienasycony,

C i D przez *(– F)* – kanały *CF* i *DF* przenoszą strumień nasycony,

G przez *(+C)* lub *(+D)* – kanały *CG* i *DG* są nienasycone,

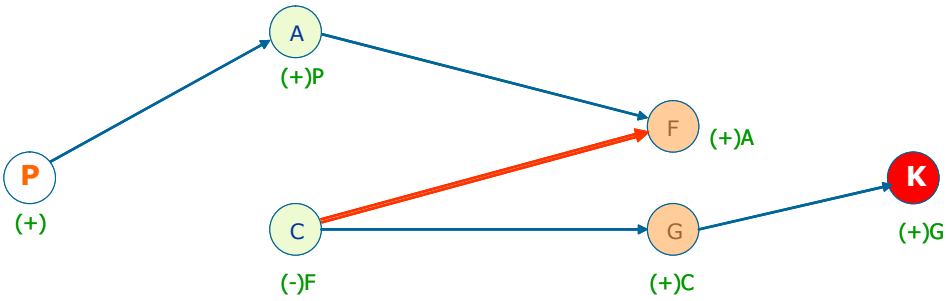
K przez *(+G)* – kanał GK nienasycony.



Rysunek 48. Graf z wierzchołkami cechowanymi

Rozważmy (rys. 49) jedną z dróg w grafie przechodzącą przez wierzchołki oznaczone:

P(+), A(+P), F(+A), C(–F), G(+C), K(+G).

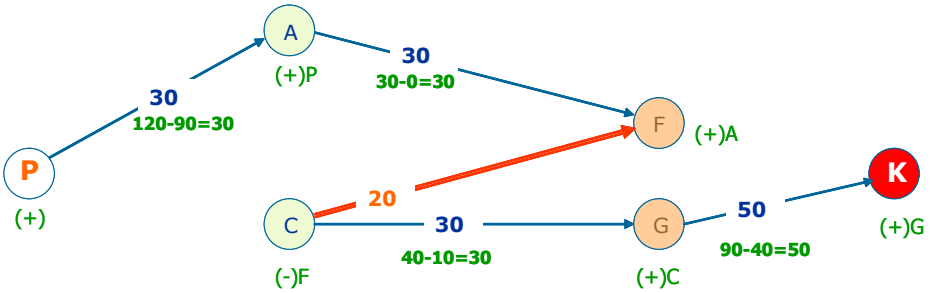


Rysunek 49. Fragment grafu przedstawiający możliwość dociążenia kanałów nienasyconych

Jeśli początek kanału oznaczony jest przez (+), wpiszemy przy nim liczbę określającą wartość dodatkowego strumienia, którym kanał ten można dociążyć (do stanu nasycenia).

Na przykład: kanał *PA* oznaczony jest liczbą 30, ponieważ 120 – 90 = 30.

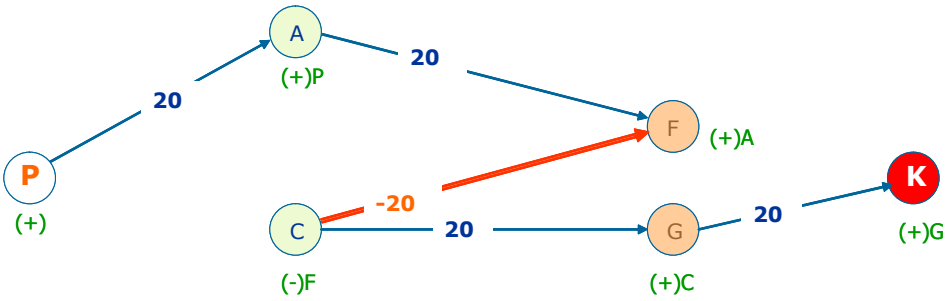
Jeśli odwrotnie – początek kanału jest oznaczony przez *(–)* (jak kanał *CF*), to wpisujemy przy nim liczbę oznaczająca wartość strumienia, który kanał ten przenosił przy poprzednim rozdziale.



Rysunek 50. Graf przedstawiający możliwości dociążenia kanałów nienasyconych

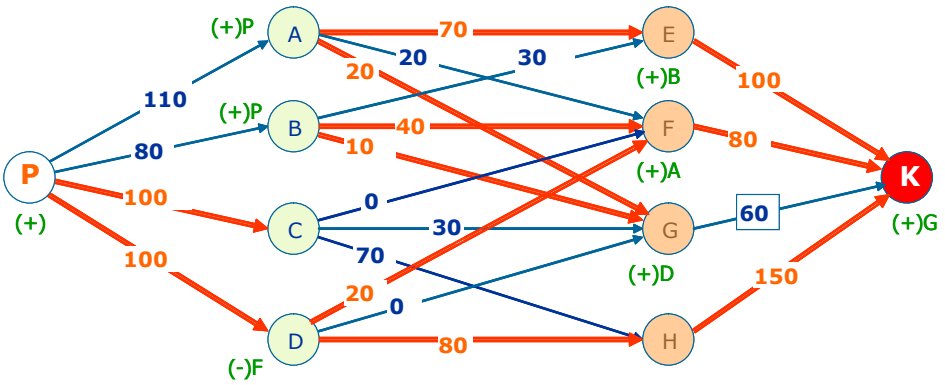
Najmniejszą wartością z tego ciągu jest liczba 20 oznaczona przy krawędzi *CF*.

Można zatem dodać 20 do strumienia na drodze między P i F pod warunkiem odjęcia 20 od strumienia między C i F i dodania 20 do strumienia na drodze między C i K.



Rysunek 51. Przykład zmian obciążenia poszczególnych kanałów bez zmiany warunku równości strumieni wchodzących i wychodzących

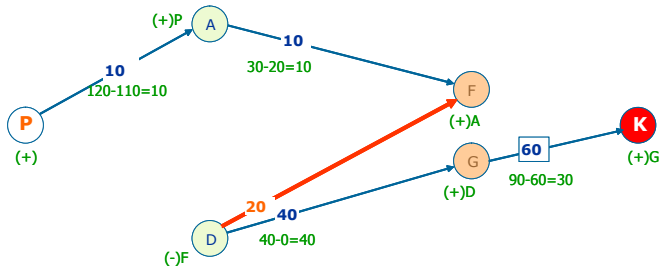
Otrzymamy wtedy nowy graf, dla którego warunek równości strumieni wchodzących do danego punktu i z niego wychodzących będzie w dalszym ciągu spełniony, a strumień wyjściowy zostanie poprawiony



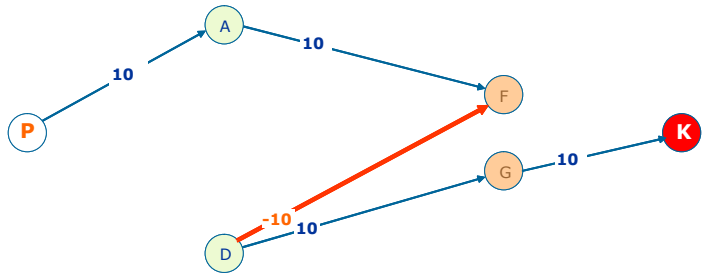
Rysunek 52. Rozwiązanie poprawione

Wierzchołek K można jednak nadal oznaczyć – a więc strumień **nie jest maksymalny**.

Możliwość dalszego dociążenia kanałów nienasyconych znajdziemy na drodze P(+), A(+P), F(+A), D(-F), G(+D), Z(+G), w którym najmniejszą liczbą jest 10.

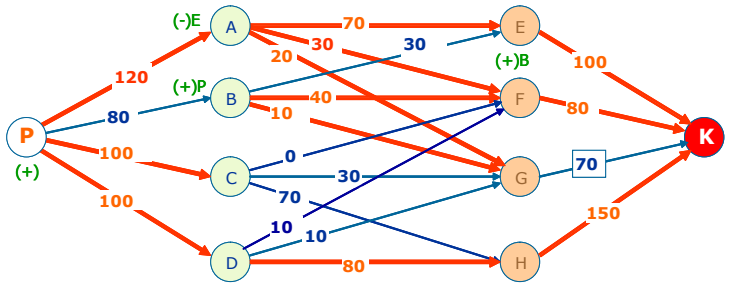


Rysunek 53. Możliwości dalszego dociążenia kanałów nienasyconych



Rysunek 54. Przykład zmian obciążenia zmierzających do dalszej poprawy rozwiązania

Ostatecznie otrzymujemy graf pokazany na rysunku 55, na którym oznaczenie cecha punktu K jest niemożliwe. Możemy więc powiedzieć, że osiągnęliśmy ***strumień maksymalny***.



Rysunek 55. Rozwiązanie optymalne, wyznaczające strumień maksymalny

Otrzymany w ten sposób rozdział strumienia jest rozwiązaniem naszego zadania. Jedynie hurtownia G nie może być w pełni obsłużona. Jej zapotrzebowanie wynoszące 90 t jabłek jest zaspokojone tylko wielkością 70 t.

Wszystkie środki transportu, obsługujące przechowalnię A będą zabierać maksymalne ilości ładunku, na jakie pozwala im ich ładowność: 70 t do hurtowni E, 30 t do hurtowni F i 20 t do hurtowni G. Środki transportu, opuszczające

przechowalnię B będą zabierać maksymalne ilości ładunku, na jakie pozwala im ich ładowność do hurtowni F (40 t) i hurtowni G, (10 t) jedynie do hurtowni E zostanie dostarczona ilość zamówiona (30 t), mimo możliwości przesyłu większej ilości tym kanałem.

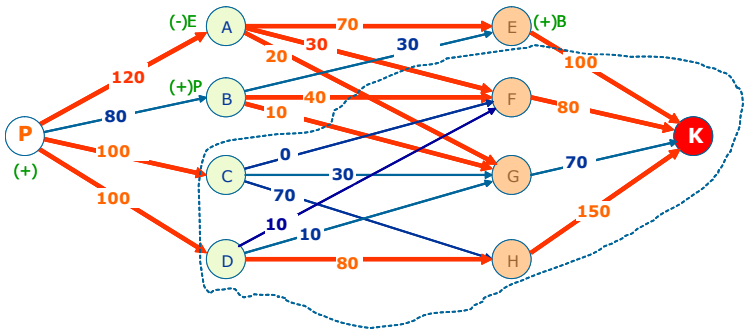
Natomiast żaden środek transportu obsługujący przechowalnię C nie zabierze ilości równej ich możliwościom ładunkowym. Środek transportowy, obsługujący kanał CG zabierze tylko 30 t jabłek przy teoretycznych możliwościach wynoszących 40 t oraz środek transportu obsługujący kanał CH zabierze 70 t przy możliwościach o 10 t większych. Kanał CF nie będzie wykorzystany w ogóle. Wreszcie środki transportowe, opuszczające przechowalnię D z przeznaczeniem do hurtowni F, G i H zabiorą odpowiednio po 10, 10 i 80 t – jedynie w tym ostatnim przypadku zdolność przewozowa środka będzie nasycona. Poniżej, w tabeli 8 zamieszczono wyniki rozwiązania problemu maksymalnego przepływu w sieci. Ostatecznie można stwierdzić, że brakujące 20 t pozostało przechowalni B. Dokładna analiza tabeli 8 wskazuje, że nie ma możliwości poprawienia tej sytuacji.

Tabela 8. Rozwiązanie problemu maksymalnego przepływu w sieci

	E	F	G	H	
A	(70)	(30)	(20)	0	120
B	30	(40)	(10)	0	80
C	0	0	30	70	100
D	0	10	10	(80)	100
	100	80	70	150	

6.2.2. Algorytm i twierdzenie Forda-Fulkersona

Spróbujmy obecnie wykazać, że posługując się wyprowadzonym algorytmem, otrzymaliśmy efektywnie optymalne rozwiązanie. W tym celu rozważmy jeszcze raz rysunek 55 i rozpatrzmy zbiór wierzchołków nieoznaczonych, to znaczy: C,D,F,G,H, i K.



Rysunek 56. Graf z zaznaczonym przekrojem zbioru

Wszystkie krawędzie grafu doprowadzające do wierzchołków tego zbioru ε od wierzchołków oznaczonych są nasycone. Gdyby tak nie było, można by było oznaczyć co najmniej jeden wierzchołek spośród zbioru ε.

Zbiór krawędzi grafu prowadzących do zbioru ε, jeśli zbiór zawiera punkt końcowy K, lecz nie zawiera wierzchołka początkowego P – nazywamy ***przekrojem zbioru ε***.

Przepustowość danego przekroju jest sumą przepustowości każdego z kanałów wchodzących do przekroju.

Ponieważ zbiór ε zawiera wierzchołek K, każdy strumień przechodzi z konieczności przez jeden z wektorów wchodzących do ε, a więc każdy strumień φ (dopływający do K) jest mniejszy lub co najwyżej równy przepustowości przekroju.

Jeśli znajdziemy strumień równy przepustowości przekroju, to strumień ten będzie strumieniem maksymalnym, a przekrój ma wówczas przepustowość minimalną.

Ford i Fulkerson wykazali, że maksymalny strumień równa się minimalnemu przekrojowi dla całej sieci transportowej:

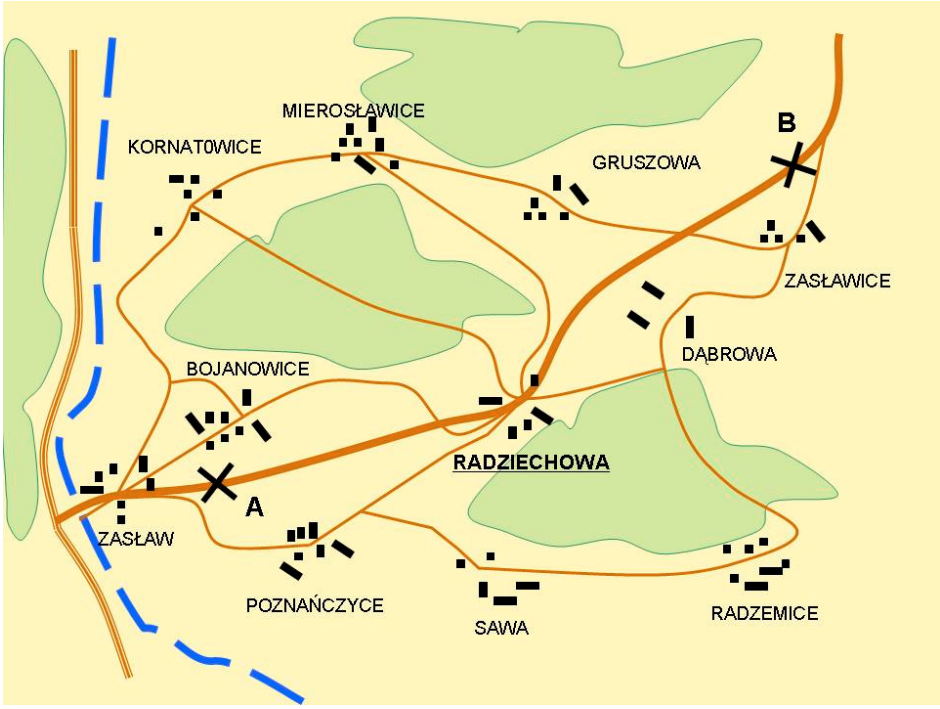
$$\varphi_{\max} = \varepsilon_{\min} \tag{41}$$

Równanie (41) stanowi twierdzenie Forda-Fulkersona o maksymalnym przepływie w sieciach.

6.2.3. Maksymalny przepływ w sieci jako narzędzie wspomagania decyzji logistycznych

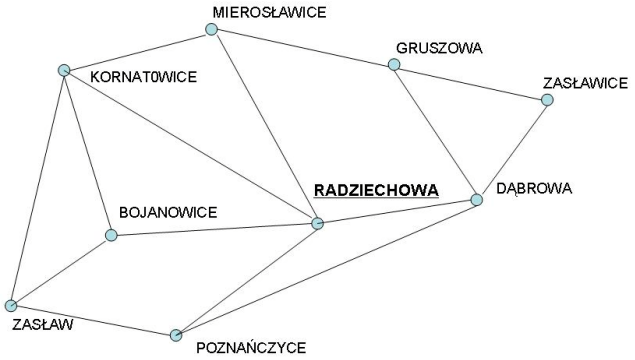
W podrozdziale tym zostanie przedstawiony inaczej skonstruowany algorytm wyznaczania maksymalnego przepływu w sieciach na przykładzie logistycznego problemu zarządzania ruchem sytuacjach kryzysowych. Problem tez został sformułowany następująco:

Przebiegająca przez obszar pewnej gminy droga wojewódzka ma być czasowo zamknięta dla ruchu z powodu prowadzonych prac remontowych. Z przeprowadzonych badań wynika, że natężenie ruchu pojazdów na tym odcinku, w godzinach szczytu komunikacyjnego wynosi 6 pojazdów na minutę. Problem przygotowania tras objazdu wyłączonego odcinka istniejącą siecią dróg gminnych pozostaje do rozwiązania przez władze gminy. Możliwości objazdu obejmują pewne odcinki dróg o różnym standardzie nawierzchni; są one również zróżnicowane pod względem ograniczeń prędkości, jak i możliwości poruszania się w obydwu kierunkach. Zróżnicowanie to powoduje różne przepustowości tych odcinków dróg. Sytuację drogową i możliwości komunikacyjne w gminie przedstawia rysunek 57.



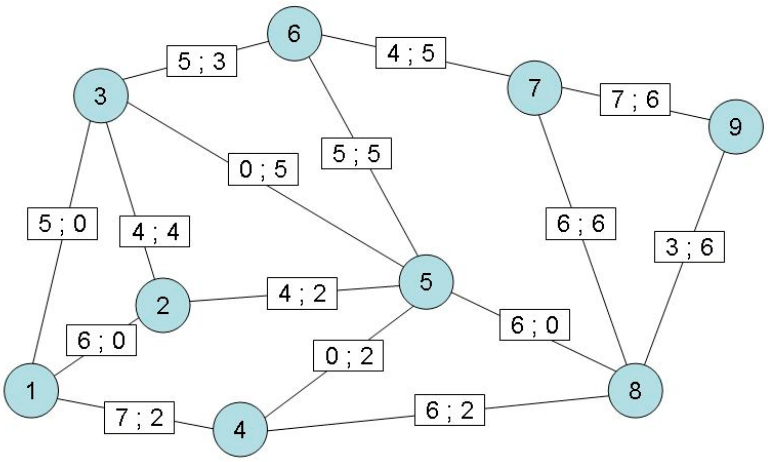
Rysunek 57. Poglądowa mapa gminy Radziechowa z naniesionym układem komunikacyjnym

Rozpatrywana alternatywna sieć transportowa, która zastąpi okresowo wyłączony z ruchu drogi wojewódzkiej między punktami A i B, została przedstawiona na rysunku 58.



Rysunek 58. Schemat możliwości objazdu wyłączonego odcinka drogi wojewódzkiej z wykorzystaniem istniejącej sieci dróg gminnych

Powyższy schemat transportowy został zastąpiony grafem, którego wierzchołki oznaczają miejscowości, a krawędzie odcinki dróg pomiędzy miejscowościami. Graf połączeń drogowych przedstawia rysunek 59.



Rysunek 59. Graf połączeń drogowych z podanymi parametrami przepływu

Każda krawędź została opisana za pomocą dwóch parametrów, określających możliwości przepływu w obydwu kierunkach. Należy wyznaczyć maksymalny przepływ w rozpatrywanej sieci i ustalić, czy jest on wystarczający dla spodziewanego natężenia ruchu. Łączny, wymagany przepływ przez wyznaczone drogi zastępcze nie powinien być mniejszy niż zbadane natężenie przepływu na wyłączonym odcinku drogi wojewódzkiej, wynoszące 6 pojazdów na minutę. Należy również wyznaczyć trasy, na które należy kierować przejeżdżające pojazdy, zapewniające ten maksymalny przepływ.

W zagadnieniu maksymalnego przepływu wyróżniamy wierzchołek początkowy, zwany źródłem i wierzchołek końcowy, zwany ujściem. Każda krawędź grafu opisana jest dwoma liczbami, które nazywamy odpowiednio, przepustowością i przepustowością rezydualną. Należy zaplanować przepływ między źródłem i ujściem, uwzględniający przepustowości wszystkich krawędzi tak, aby łączna wielkość tego przypływu była największa.

Istotną rolę w wykorzystaniu algorytmu maksymalnego przepływu w sieci odgrywa zasada równowagi przepływu dla wszystkich rozpatrywanych krawędzi. Zasada ta mówi, że dopuszczalne wykorzystanie przepustowości krawędzi w określonym kierunku powoduje zmniejszenie wielkości przepustowości w tym kierunku o wielkość wykorzystanej przepustowości oraz zwiększeniem, o taką samą wielkość, przepustowości w kierunku przeciwnym.

Algorytm wyznaczania maksymalnego przepływu w sieci jest postępowaniem iteracyjnym i składa się w każdym etapie iteracji z następujących kroków:

Znajdujemy dowolną ścieżkę prowadzącą od wierzchołka początkowego (źródła) do wierzchołka końcowego (ujścia), dla której przepustowości wszystkich łuków są większe od zera. Jeżeli takiej ścieżki nie można wyznaczyć, to przepływ nie istnieje (lub maksymalny przepływ wyznaczono już w poprzednich krokach).

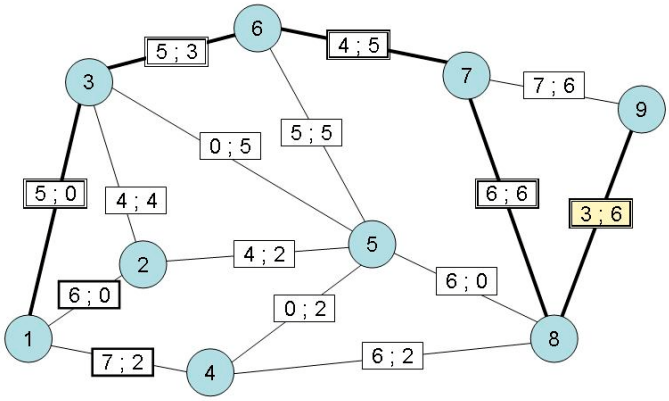
Na wyznaczonej drodze znajdujemy krawędź o najmniejszej przepustowości w rozpatrywanym kierunku. Znalezioną przepustowość oznaczamy jako p.

Zmniejszamy przepustowość łuków leżących na znalezionej ścieżce o wielkość p i zwiększamy o tę samą wartość odpowiednie przepustowości rezydualne.

Prześledźmy przebieg kolejnych iteracji dla zadania poszukiwania możliwości objazdu wyłączonego odcinka drogi istniejącą siecią dróg.

Iteracja 1

Konstruujemy pierwszą drogę od węzła 1 do węzła 9. Dla węzła 1 mamy trzy możliwości wyboru pierwszej krawędzi: 1–2, 1–3 lub 1–4. O wyborze jednaj z trzech możliwości decydujemy arbitralnie – wybierając krawędź 1–3. Z wierzchołka 3 mamy wychodzące trzy krawędzie: 3–2, 3–5 i 3–6. Jednak arbitralny wybór mamy między dwoma krawędziami 3–2 i 3–6, ponieważ krawędź 3–5 jest krawędzią o zerowym przepływie w wymaganym kierunku. Możemy wybierać albo drogę przez krawędź 6–5 albo 6–7. Decydujemy się na tę ostatnią 6–7. Postępując w ten sposób dalej, wybieramy krawędzie 7–8 i 8–9. Otrzymujemy w ten sposób pierwszy przepływ w sieci, który przechodzi przez wierzchołki 1–3–6–7–8–9. Określamy wielkość tego przepływu, którą jest minimalna wartość przepustowości (zgodnej z kierunkiem przepływu) na krawędziach tworzących tę drogę (rys. 60). Obliczamy nowe przepustowości dla krawędzi, które zostały wykorzystane w rozpatrywanym przepływie. W tabeli 9 przedstawiony został sposób obliczania nowych przepustowości.



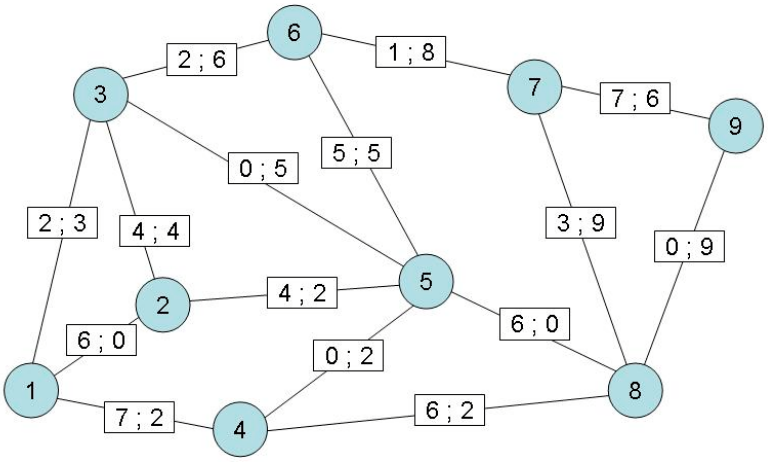
Rysunek 60. Wyznaczona w pierwszej iteracji droga od źródła do ujścia

Maksymalny przepływ na tej drodze (1–3–6–7–8–9) limitowany jest przepływem minimalnym, jaki ma krawędź 8–9 wynoszącym, 3 pojazdy na minutę. Sposób obliczenia przepustowości tej drogi ilustruje tabela 9.

Tabela 9. Sposób obliczania przepustowości dla drogi wyznaczonej w pierwszej iteracji

Krawędź	Przepustowości			
	poprzednie		nowe	
1–3	55	00	5–3=2	0+3=3
3–6	55	33	5–3=2	3+3=6
6–7	54	55	4–3=1	5+3=8
7–8	66	66	6–3=3	6+3=9
8–9	33	66	3–3=0	6+3=9

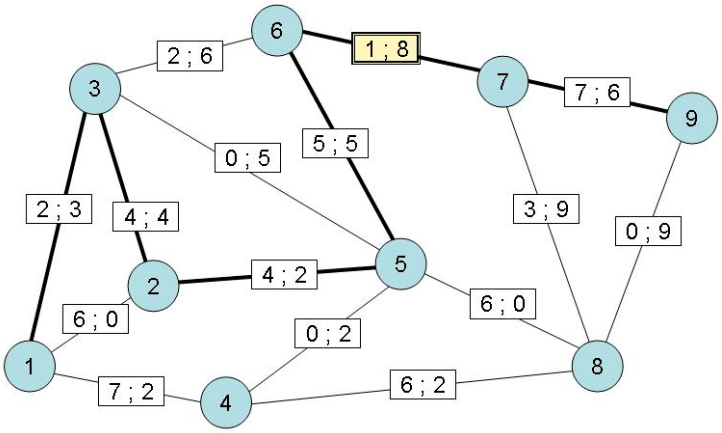
Graf wyznaczenia maksymalnego przepływu w sieci po pierwszej iteracji przedstawia rysunek 61.



Rysunek 61. Graf wyznaczenia maksymalnego przepływu w sieci po pierwszej iteracji

Iteracja 2

Konstruujemy drugą drogę od źródła do ujścia. Wykorzystujemy w tym celu sieć przepływu ze zmodyfikowanymi przepustowościami, przedstawioną na rys. 62. Proponowana obecnie droga przechodzi przez wierzchołki 1–3–2–5–6–7–9. Porównanie wyróżnionych wartości przepływu wskazuje na to, że przepustowość tej drogi jest równa 1.

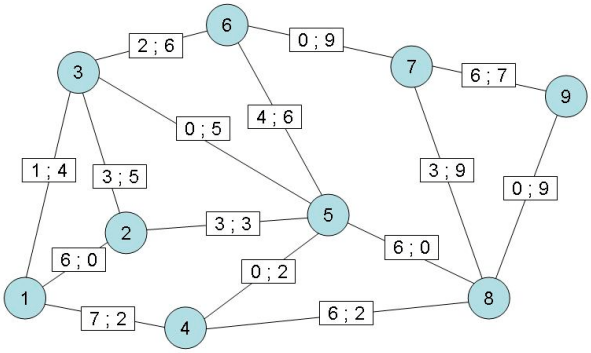


Rysunek 62. Wybór ścieżki od źródła do ujścia w drugiej iteracji

Sposób obliczenia przepustowości poszczególnych krawędzi na drodze po drugiej iteracji ilustruje tabela 10, a wynik wyznaczonego przepływu po drugiej iteracji przedstawiono na rysunku 63.

Tabela 10. Sposób obliczania przepustowości dla drogi wyznaczonej w drugiej iteracji

Krawędź	Przepustowości			
	poprzednie		nowe	
1–3	22	33	2–1=1	3+1=4
3–2	44	44	4–1=3	4+1=5
2–5	44	22	4–1=3	2+1=3
5–6	55	55	5–1=4	5+1=6
6–7	11	88	1–1=0	8+1=9
7–9	77	66	7–1=6	6+1=7

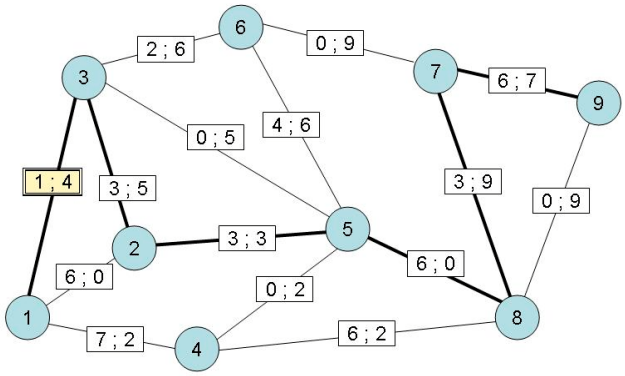


Rysunek 63. Graf wyznaczenia maksymalnego przepływu w sieci po drugiej iteracji

Maksymalny przepływ na drodze (1–3–5–6–7–9) po drugiej iteracji limitowany jest przepływem minimalnym, jaki ma krawędź 6–7 wynoszącym 1 pojazd na minutę.

Iteracja 3

W trzeciej iteracji droga od źródła do ujścia wyznaczona zostanie na podstawie grafu ze zmodyfikowanymi przepływami w poprzednich iteracjach. W tej iteracji otrzymamy drogę 1–3–2–5–8–7–9 przedstawioną na rysunku 64. Maksymalny przepływ na tej drodze jest uwarunkowany przepływem krawędzi 1–3 i wynosi 1 pojazd na minutę.



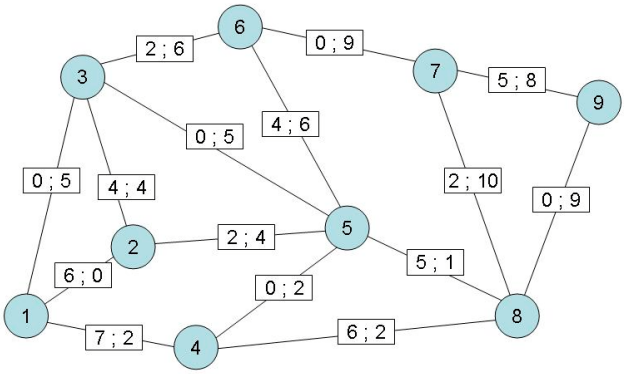
Rysunek 64. Wybór ścieżki od źródła do ujścia w trzeciej iteracji

Sposóby oznaczenia nowych przepustowości po trzeciej iteracji przedstawiane zostały w tabeli 11.

Tabela 11. Sposób obliczania przepustowości dla drogi wyznaczonej w trzeciej iteracji

Krawędź	Przepustowości			
	poprzednie		nowe	
1–3	11	44	1–1=0	4+1=5
3–2	55	33	5–1=4	3+1=4
2–5	33	33	3–1=2	3+1=4
5–8	66	00	6–1=5	0+1=1
8–7	33	99	3–1=2	9+1=10
7–9	66	77	6–1=5	7+1=8

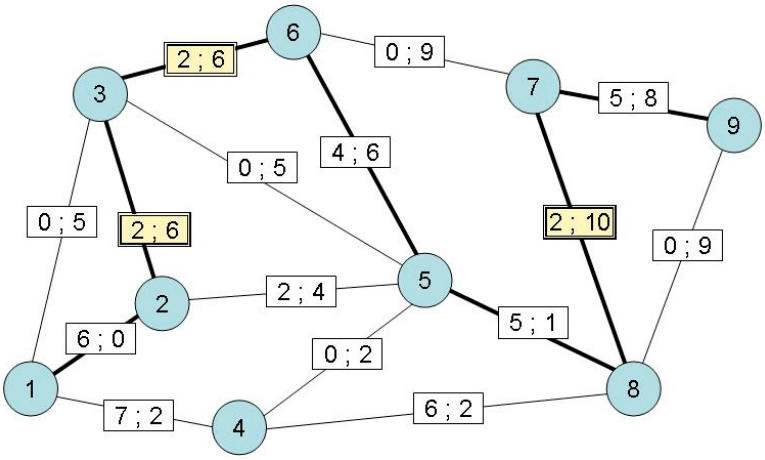
Graf zmodyfikowany po trzeciej iteracji przedstawia rysunek 65.



Rysunek 65. Graf wyznaczenia maksymalnego przepływu w sieci po trzeciej iteracji

Iteracja 4

Konstruujemy czwartą drogę od źródła do ujścia. W tym celu wykorzystujemy zmodyfikowane przepustowości. Otrzymujemy drogę 1–2–3–6–5–8–7–9. Porównanie wyróżnionych wartości przepływu wskazuje na to, że przepustowość tej drogi jest równa 2 pojazdy na minutę.



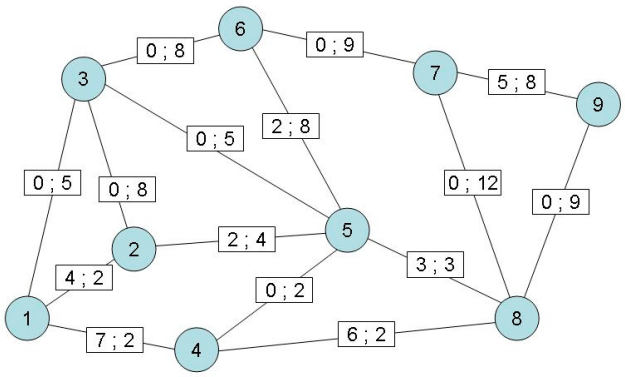
Rysunek 66. Wybór ścieżki od źródła do ujścia w czwartej iteracji

Obliczamy nowe przepustowości dla krawędzi, które zostały wykorzystane w rozpatrywanym przepływie. Sposób obliczania nowych przepustowości ilustruje tabela 12.

Tabela 12. Sposób obliczania przepustowości dla drogi wyznaczonej w czwartej iteracji

Krawędź	Przepustowości			
	poprzednie		nowe	
1–2	66	00	6–2=4	0+2=2
2–3	22	66	2–2=0	6+2=8
3–6	22	66	2–2=0	6+2=8
6–5	66	44	6–2=4	4+2=6
5–8	55	11	5–2=3	1+2=3
8–7	22	110	2–2=0	10+2=12
7–9	35	88	5–2=3	8+2=10

Poniżej, na rysunku 67 przedstawiony został graf wyznaczenia maksymalnego przepływu ze zmodyfikowanymi przepustowościami po czterech iteracjach.



Rysunek 67. Przepustowości wszystkich krawędzi grafu po czterech iteracjach

Analiza rysunku 67 wykazuje, że czwarta iteracja kończy wyznaczenie maksymalnego przepływu w sieci istniejących dróg. Istniejąca w grafie droga, która jeszcze nie była analizowana (1–4–8–5–6) nie dochodzi jednak do węzła końcowego, zatem nie może być brana pod uwagę. Ponieważ wyczerpane zostały w ten sposób wszystkie możliwości tworzenia nowych dróg, ostatnia znaleziona droga nie doprowadziła do wierzchołka końcowego, oznacza to, że przepustowości wyznaczonych wcześniej czterech dróg określają maksymalny przepływ w rozpatrywanej sieci. Przepływ ten wynosi:

droga pierwsza – (1–3–6–7–8–9) – przepływ 3 pojazdy na minutę,
droga druga – (1–3–2–5–6–7–9) – przepływ 1 pojazd na minutę,
droga trzecia – (1–3–2–5–8–7–9) – przepływ 1 pojazd na minutę,
droga czwarta – (1–2–3–6–5–8) – przepływ 2 pojazdy na minutę,
razem maksymalny przepływ 7 pojazdów na minutę.

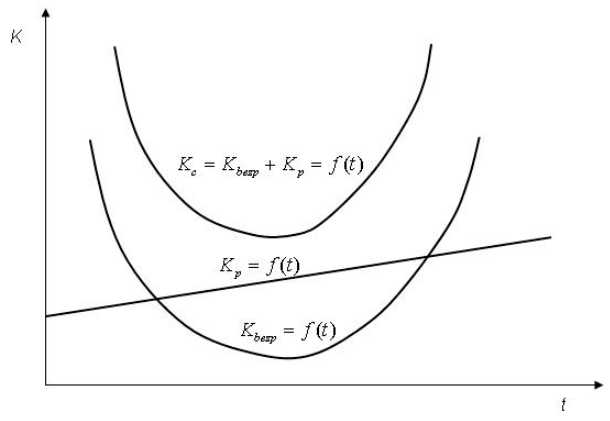
6.3. ANALIZA CZASOWO-KOSZTOWA

6.3.1. Zależność kosztów czynności od czasu jej wykonania

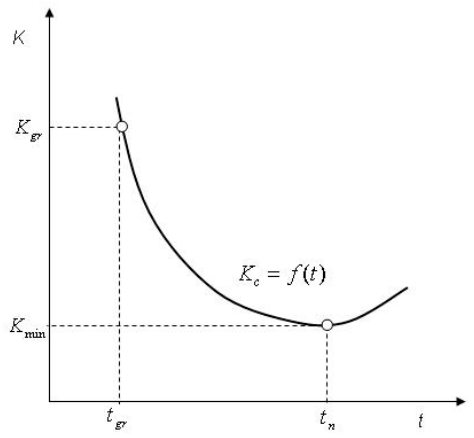
Wykreślenie drogi krytycznej, obliczanie zapasów czasu czynności nieleżących na drodze krytycznej oraz ustalenie terminów rozpoczęcia i ukończenia czynności uwzględnia jedynie operatywną stronę wykonywania programu. Odrębnym zagadnieniem jest ukształtowanie planów tak, aby koszty związane z wykonaniem przedsięwzięcia były najniższe. Względy ekonomiczne powinny decydować o celowości przyspieszenia niektórych terminów, np. przez pracę na dwie lub trzy zmiany, albo przeciwnie, względy ekonomiczne mogą przemawiać za ich wydłużeniem, zwłaszcza czynności niekrytycznych w ramach dysponowanych rezerw czasowych, np. praca na jedną zmianę. Najczęściej jednak występuje konieczność skrócenia planowanego czasu realizacji przedsięwzięcia, aby nadgonić opóźnienia lub ze względu na pilne potrzeby inwestora. Każde takie przyspieszenie tempa pracy, z reguły pociąga za sobą wzrost kosztów wykonania. Dokładne określenie zmiany kosztów wykonania, w zależności od czasu lub tempa wykonywania poszczególnych czynności wchodzących w skład projektu, nie jest sprawą prostą. Na ogół sposoby kalkulacji kosztów na podstawie normatywnych kosztów jednostkowych przemawiają za liniowym wzrostem kosztów w zależności od wielkości produkcji (koszty bezpośrednie, ściśle związane z kosztami robocizny, zużytych materiałów i pracy sprzętu). Można założyć jednak, że ze względu na mniejszą wydajność pracy w systemie wielozmianowym lub w systemie wydłużonego dnia pracy, lub konieczność zatrudnienia dodatkowej liczby pracowników i dodatkowego sprzętu generuje dodatkowe koszty. Uzależnienie kosztów wykonania od czasu trwania czynności leży również w składniku kosztów pośrednich, które najczęściej naliczane są jako procentowy składnik kosztów bezpośrednich. W tym składniku zawierają się koszty ogólne produkcji, koszty dzierżaw, magazynowania koszty administracji itp., a ich zależność od czasu jest już bardziej intuicyjna. Do planowania ekonomicznego potrzebna jest jednak znajomość zależności wszystkich kosztów od czasu trwania czynności produkcyjnej.

Bardzo często w literaturze dotyczącej rachunku kosztów można dostrzec poglądowy rysunek charakteryzujący przebieg całkowitych kosztów produkcji w funkcji czasu.

Jak juz wspomniano, określenie krzywej kosztów jako funkcji czasu trwania poszczególnych czynności nie jest sprawą prostą, zwłaszcza, że niekiedy krzywa przebiegu zmian kosztów w zależności od czasu wykonywania pracy może mieć przebieg różnorodny. Najczęściej do analizy kosztów na podstawie planów sieciowych uznaje się za typowy przebieg krzywej kosztów jako funkcji czasu $K_c = f(t)$ według rysunku 69.



Rysunek 68. Zależność kosztów wykonania czynności od czasu jej trwania



Rysunek 69. Typowy przebieg krzywej kosztów jako funkcji czasu

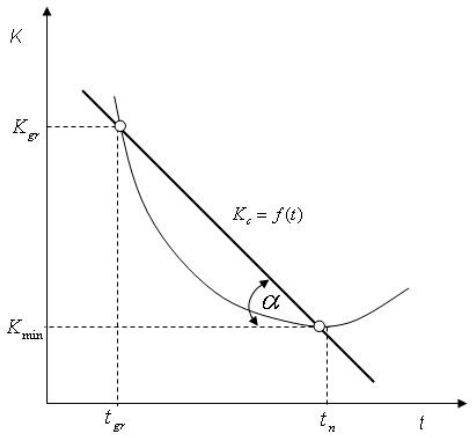
gdzie:

t_n – czas tzw. „normalny” czynności, w którym koszty czynności są najniższe (K_{min});

t_{gr} – czas graniczny; jest to najkrótszy, możliwy ze względów technologicznych, czas wykonywania czynności (*crash time*), przy koszcie granicznym (K_{gr}).

Planowanie sieciowe jest stosowane najczęściej do organizacji prac wytwórczych, brane pod uwagę koszty są z reguły kosztami bezpośrednimi produkcji. Przyjęto ostatecznie, całkowicie dowolnie, że czasy trwania poszczególnych czynności stosowane w Siechach deterministycznych drogi krytycznej (metoda CPM) odpowiadają czasom normalnym t_n, przy których koszty własne produkcji wykazują minimum. Wynika stąd, że skrócenie czasu czynności pociągać będzie za sobą pewien wzrost kosztów produkcji. Jest to założenie całkowicie dowolne, przyjęte dla uproszczenia dalszej analizy matematycznej, w której zakłada się, że czasy czynności podawane do wykreślenia grafu sieciowego odpowiadają idealnemu stanowi organizacji pracy. Omawiając metody analizy sieciowej kosztów wykonania jako funkcji czasu, przyjmiemy, choć z zastrzeżeniami, założenie, że czas normatywny t_n odpowiada najniższej wartości kosztów wykonania K_{min}. Skracanie czasów wykonania poszczególnych czynności jest ograniczone względami technologicznymi i skracanie czasu poniżej wartości t_{gr} nie jest możliwe. Koszt wykonania czynności w jej czasie granicznym wynosi K_{gr}.

Dla dalszego uproszczenia analizy sieciowej kosztów wykonania w zależności od czasu jej trwania przyjęto w miejsce parabolicznej krzywej $K_c = f(t)$ przebieg liniowy, jak podano na rysunku 70.



Rysunek 70. Liniowy przebieg zależności kosztów wykonania od czasu trwania czynności

Wprowadzając liniowy przebieg funkcji $K_c = f(t)$, można znacznie uprościć zagadnienie przez założenie stałego przyrostu kosztów na jednostkę czasu, tzw. *średni gradient kosztów s*:

$$tg\alpha = \frac{(K_{gr} - K_{min})}{(t_n - t_{gr})} = s \tag{42}$$

Wreszcie można przedstawić w uproszczonej postaci funkcję kosztów $K_c = f(t)$ jako równanie linii prostej:

$$K_t = (K_{min} + s \cdot t_n) - s \cdot t \tag{43}$$

Podstawiając

$$b = (K_{min} + s \cdot t_n) \tag{44}$$

otrzymamy znane równanie linii prostej:

$$K_t = b - s \cdot t \tag{45}$$

Gradient kosztów s wyraża się w zł/jednostkę czasu czynności jest różny dla różnych czynności. Stąd ogólne równanie kosztów różnych czynności y_{ij} w sieci zależności przedstawia się:

$$K_{t_{ij}} = b_{ij} - s_{ij} \cdot t_{ij} \tag{46}$$

przy czym:

$$t_n > t > t_{gr} \tag{47}$$

Dla danego programu sieciowego, zawierającego pewną liczbę czynności, koszt całkowity programu przedstawiać będzie suma kosztów wszystkich czynności y_{ij}, należących do zbioru U stanowiącego program:

$$K_c = \sum_{y_{ij} EU}^{n} K_{t_{ij}} \tag{48}$$

– opierając się na równaniu kosztów całego programu, można rozwiązać szereg ekonomicznych problemów planowania, jak np.:

– opracowanie programu sieciowego dla minimum kosztów programu, przy niezmienionym terminie ukończenia,

– minimalizacja czasu przy zadanym koszcie,

– skrócenie terminu ukończenia programu przy minimalnym wzroście kosztów Kc.

Zagadnienia te można rozwiązać, jeżeli dla każdej czynności znane są równania kosztów jako funkcji czasu, względnie gradient kosztu s_{ij} oraz czasy krańcowe, tj. czas graniczny t_{gr} oraz czas normalny t_n. oprócz czasu planowanego czynności t_{ij}. Dla uproszczenia dalszych rozważań przyjmijmy, że planowany czas realizacji czynności (czas dyrektywny) t_{ij} jest równy czasowi normalnemu t_n.

6.3.2. Analiza CPM-COST

Omawiając metody planowania sieciowego, zwracaliśmy uwagę przede wszystkim na analizę ilościową. Niemniej ważnym zagadnieniem programowania sieciowego jest aspekt ekonomiczny i możliwość modyfikacji modelu przez kompresję sieci wynikającą ze zbyt długiego dla inwestora lub odbiorcy okresu realizacji przedsięwzięcia. Ekonomiczne względy sprawiają, że należy wówczas rozpatrzyć techniczne możliwości skrócenia terminu wykonania całego programu, w taki jednak sposób, aby koszty związane z jego realizacją były jak najniższe. A zatem określenie optymalnego terminu realizacji przedsięwzięcia wiązać się będzie z takim ułożeniem programu przyspieszenia, aby największa akceleracja przypadała na te czynności krytyczne, których koszty przyspieszenia będą najniższe.

Tego rodzaju akceleracja planu wymaga z reguły zwiększonych nakładów na robociznę i pracę sprzętu i urządzeń. Na rysunku 70 podano przebieg wzrostu kosztów czynności w zależności od czasu jej wykonania. Podobny charakter ma również przebieg zmian kosztów wykonania całego przedsięwzięcia, złożonego z wielu czynności, w zależności od czasu ich wykonywania i końcowego terminu. Koszt całkowity realizacji projektu $K_c = K_{min}$,, odpowiada terminowi końcowemu, wyznaczonemu przez długość drogi krytycznej, jeśli założymy, że wszystkie czynności wykonywane są w czasie normalnym t_n. Koszt K_{max} odpowiada natomiast terminowi realizacji, w którym wszystkie czynności krytyczne mają czas graniczny t_{gr}. Dalsze skracanie czasu wykonania programu poniżej t_{gr} jest ze względów technologicznych niemożliwe.

Algorytm kompresji sieci jest następujący[7]:

Na podstawie normalnych czasów trwania czynności wyznaczyć termin końcowy i ścieżkę krytyczną.

Zestawić czynności krytyczne i obliczyć dla nich gradienty kosztów s_{ij}.

Wyeliminować z zestawienia te czynności krytyczne, dla których średni gradient kosztów nie istnieje, tzn. $t_n = ti_j = t_{gr}$.

Proces skracania rozpocząć od czynności krytycznej o najniższym gradiencie kosztów s_{ij}, skracając jej czas o jak największą liczbę jednostek czasu (dni). Należy jednak pamiętać, że nie można skrócić czynności więcej niż wynosi jej czas graniczny t_{gr} oraz, że skracając czas drogi krytycznej (jako najdłuższej drogi w grafie) możemy doprowadzić do pojawienia się w grafie innych, nowych dróg krytycznych.

Jeżeli występują dwie lub więcej ścieżek krytycznych w sieci, należy skracać czas o tę samą wielkość na wszystkich równoległych ścieżkach krytycznych.

Najkrótszy termin wykonania programu sieciowego uzyskuje się, gdy wszystkie czynności leżące na którejkolwiek z dróg krytycznych osiągną czasy graniczne t_{gr},. Dalsze skracanie czasu wykonania programu jest wówczas niemożliwe.

[7] K. Kukuła i in. *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*. PWN, Warszawa 2002, s. 190–191.

Koszty przyspieszenia na każdym etapie oblicza się jako iloczyn gradientu kosztów (s_{ij}) dla danej czynności i liczby jednostek czasu (dni), o które dana czynność krytyczna została skrócona. Łączne koszty przyspieszenia są sumą kosztów poniesionych na poszczególnych etapach.

Zaprezentowany algorytm do wyznaczania optymalnego programu akceleracji czynności i określenia najkrótszego czasu wykonania całego przedsięwzięcia przy minimum kosztów stosuje się zarówno do sieci CPM, jak i PERT.

Rozważmy pod katem analizy kosztowej nasze, analizowane już przedsięwzięcie przedstawione za pomocą sieci zależności pokazanej na rysunku 7. Dyrektywny termin realizacji tego zadania przy normatywnych czasach trwania czynności $t_{ij} = t_n$ wynosi 26 dni. (długość drogi krytycznej). Wyniki analizy drogi krytycznej, wyznaczenie terminów zajścia wszystkich zdarzeń w sieci oraz terminów rozpoczęcia i zakończenia poszczególnych czynności (analizy CPM) zostały wcześniej zamieszczone w tabeli 1.

Jak już wspomniano do przeprowadzenia analizy czasowo-kosztowej metodą CPM-COST należy uzupełnić zestawione informacje o koszty wykonania poszczególnych czynności. Dane takie zawiera tabela 9. W kolumnach [2–5] tabeli zamieszczono numery zdarzeń początkowych (i) i końcowych (j) wszystkich czynności składających się na analizowany projekt oraz normatywne (t_n) i graniczne (t_{gr}) czasy wykonania czynności. W kolumnach [6–8] zamieszczone są koszty wykonania czynności przy tych czasach; normatywnym (K_n) oraz granicznym (K_{gr}) jak również wyliczony na podstawie formuły (39) gradient kosztów (s_{ij}).

Tabela 13. Zestawienie danych do analizy czasowo-kosztowej CPM-COST

nr	i	j	$t_{ij} = t_n$	t_{gr}	K_n	K_{gr}	s_{ij}
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	1,0	1,0	110,0	110,0	0,0
2	2	3	4,0	2,0	80,0	160,0	40,0
3	2	4	5,0	3,0	50,0	100,0	25,0
4	2	5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5	3	4	2,0	2,0	120,0	120,0	0,0
6	3	7	4,0	3,0	60,0	110,0	50,0
7	3	11	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
8	4	10	6,0	3,0	60,0	120,0	20,0
9	5	6	3,0	1,0	50,0	140,0	45,0
10	5	7	5,0	2,0	160,0	210,0	16,6
11	6	7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
12	6	8	5,0	2,0	110,0	150,0	13,3
13	7	9	3,0	2,0	80,0	110,0	30,0
14	8	9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
15	9	11	6,0	4,0	120,0	160,0	20,0
16	10	11	4,0	3,0	60,0	80,0	20,0
17	10	12	3,0	3,0	120,0	120,0	0,0
18	11	13	3,0	3,0	80,0	80,0	0,0
19	12	13	3,0	1,0	140,0	160,0	10,0
20	13	14	3,0	2,0	120,0	180,0	60,0
21	14	15	2,0	2,0	160,0	160,0	0,0

Koszt całkowity wykonania całego przedsięwzięcia w czasie normatywnym $T^{0}_{konc.} = T^{1}_{konc.} = 26$ dni wynosi *(K_c = K_{min}=1680)* jednostek. Czy jest możliwe skrócenie tego terminu o pewien okres, np. o cztery dni w stosunku do terminu dyrektywnego ($T^{*}_{konc(4).} = T^{1}_{konc(4).} = 22$) dni i jakie dodatkowe koszty należy ponieść, aby dokonać takiego przyspieszenia programu?

Aby dokonać takiej analizy należy postępować zgodnie z podanym algorytmem. Wyeliminować z zestawienia czynności w tabeli 13, te czynności krytyczne, dla których nie istnieje średni gradient kosztów, tzn. $t_n = t_{gr.}$

Z tabeli, dla jej przejrzystości wyeliminowano również czynności zerowe, które nie pochłaniają żadnych środków i dla których $K_c = K_{gr} = 0$, jak również wszystkie pozostałe czynności niekrytyczne, dla których średni gradient kosztów również jest równy zeru ($s_{ij} = 0$). Zredukowane zestawienie czynności możliwych do akceleracji zawiera tabela 14.

Tabela 14. Zestawienie czynności uczestniczących w procesie akceleracji

nr	i	j	$t_{ij} = t_n$	t_{gr}	K_n	K_{gr}	s_{ij}
1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	3	4,0	2,0	80,0	160,0	40,0
3	2	4	5,0	3,0	50,0	100,0	25,0
6	3	7	4,0	3,0	60,0	110,0	50,0
8	4	10	6,0	3,0	60,0	120,0	20,0
9	5	6	3,0	1,0	50,0	140,0	45,0
10	5	7	5,0	2,0	160,0	210,0	16,6
12	6	8	5,0	2,0	110,0	150,0	13,3
13	7	9	3,0	2,0	80,0	110,0	30,0
15	9	11	6,0	4,0	120,0	160,0	20,0
16	10	11	4,0	3,0	60,0	80,0	20,0
19	12	13	3,0	1,0	140,0	160,0	10,0
20	13	14	3,0	2,0	120,0	180,0	60,0

Proces skracania należy rozpocząć od czynności krytycznej o najniższym gradiencie kosztów czyli od czynności (9–11) dla tej czynności bowiem średni gradient kosztów wynosi $s_{(9\text{-}11)} = 20$ jednostek. Czasy normatywny i graniczny dla tej czynności wynoszą odpowiednio; $t_{n(9\text{-}11)} = 6$ dni i $t_{gr(9\text{-}11)} = 4$ dni. Zatem możliwe jest przyspieszenie realizacji tej czynności o 2 dni. Koszt takiej akceleracji wyniesie:

$$K^{*}_{(9-11)} = (t_{n(9-11)} - t_{gr(9-11)}) \cdot s_{(9-11)} = (6-4) \cdot 20 = 40 \text{ jednostek.}$$

Następną czynnością leżącą na drodze krytycznej, którą jeszcze można skrócić bez spowodowania większych zakłóceń w drodze krytycznej jest czyn-

ność (13–14) jej gradient kosztów wynosi 60 jednostek, a może ona ulec skróceniu o 1 dzień z trzech do dwóch dni. Koszty tego skrócenia wyniosą:

$$K^*_{(13-14)} = (t_{n(13-1491)} - t_{gr(713-1411)}) \cdot s_{(13-141)} = (3-2) \cdot 60 = 60 \text{ jednostek}$$

Po tym kroku akceleracji uzyskaliśmy skrócenie przedsięwzięcia o trzy dni z 26 do 23 dni i dodatkowy koszt jaki należy przez to ponieść to $K^* = K^*_{((-11)} + K^*_{(13-14)} = 40 + 60 = 100$ jednostek.

Aby skrócić całe zadanie o jeszcze jeden dzień do czasy całkowitego 22 dni należałoby skrócić jaszcze jakąś czynność krytyczną o jeden dzień. Musimy jednak zwrócić uwagę, że przy takiej akceleracji pojawiła się nowa droga krytyczna przechodząca przez czynności 1–2–4–10–12–13–14–15. Dalsze skracanie starej drogi krytycznej bez uwzględnienia zmian na nowej drodze krytycznej jest niemożliwe. Należy teraz skracać czynności leżące na starej i nowej drodze krytycznej równocześnie. Taką możliwość daje skrócenie czynności 4–10 o jeden dzień i czynności 7–9 również o jeden dzień. Dodatkowe koszty przyspieszenia teraz wyniosą:

$$K^* = K^*_{(4-10)} + K^*_{(7-9)} = 1 \cdot s_{(4-10)} + 1 \cdot s_{(7-9)} = 20 + 30 = 50 \text{ jednostek.}$$

Ostatecznie skrócenie całego przedsięwzięcia o 4 dni (do $T^0_{15} = T^1_{15} = 22$ dni spowoduje przyrost kosztów całkowitych o 150 jednostek.

Istnieją również i inne możliwości uzyskania takiej akceleracji z takim samym efektem finansowym. Poniżej w tabeli 15 zamieszone zostały wyniki analizy dokonanej z wykorzystaniem programu komputerowego[8].

Tabela 15. Ostateczne wyniki analizy skrócenia czasu $T^0_{15} = T^1_{15} = 22$ dni

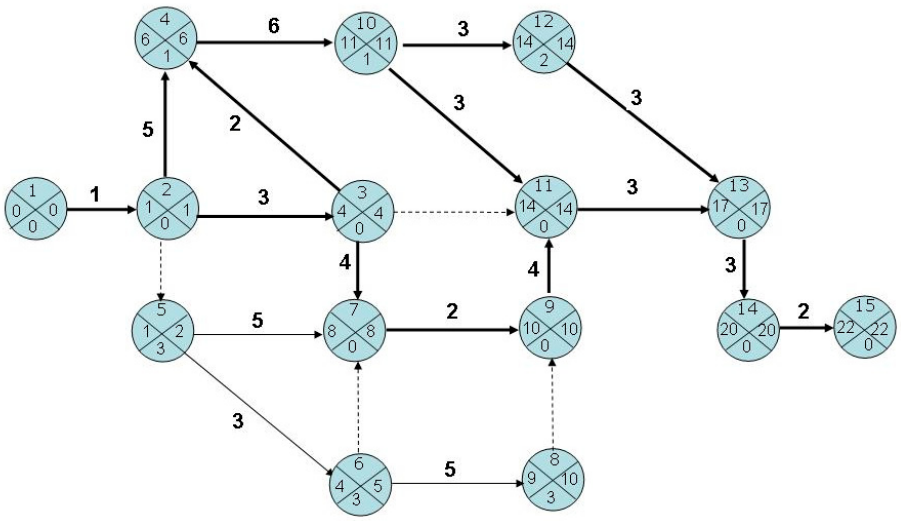
nr	i	j	t^I_{ij}	t^*_{ij}	Najwcześniejszy		Najpóźniejszy		Z^I_c
					początek	koniec	początek	koniec	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0	1,0	0,0
2	2	3	3,0	1,0	1,0	4,0	1,0	4,0	0,0
3	2	4	5,0	0,0	1,0	6,0	1,0	6,0	0,0
4	2	5	0,0	0,0	1,0	1,0	2,0	2,0	1,0
5	3	4	2,0	0,0	4,0	6,0	4,0	6,0	0,0
6	3	7	4,0	0,0	4,0	8,0	4,0	8,0	0,0
7	3	11	0,0	0,0	4,0	4,0	14,0	14,0	10,0
8	4	10	5,0	1,0	6,0	11,0	6,0	11,0	0,0
9	5	6	3,0	0,0	1,0	4,0	2,0	5,0	1,0

[8] Program komputerowy do analizy czasowo-kosztowej w sieciach CPM i PERT został opracowany przez zespół pracowników naukowych Akademii Ekonomicznej w Katowicach pod kierunkiem prof. dr. T. Trzaskalika.

nr	i	j	t_{ij}^{I}	t_{ij}^{*}	Najwcześniejszy		Najpóźniejszy		Z_c^I
					początek	koniec	początek	koniec	
10	5	7	5,0	0,0	1,0	6,0	3,0	8,0	2,0
11	6	7	0,0	0,0	4,0	4,0	8,0	8,0	4,0
12	6	8	5,0	0,0	4,0	9,0	5,0	10,0	1,0
13	7	9	2,0	1,0	8,0	10,0	8,0	10,0	0,0
14	8	9	0,0	0,0	9,0	9,0	10,0	10,0	1,0
15	9	11	4,0	2,0	10,0	14,0	10,0	14,0	0,0
16	10	11	3,0	1,0	11,0	14,0	11,0	14,0	0,0
17	10	12	3,0	0,0	11,0	14,0	11,0	14,0	0,0
18	11	13	3,0	0,0	14,0	17,0	14,0	17,0	0,0
19	12	13	3,0	0,0	14,0	17,0	14,0	17,0	0,0
20	13	14	3,0	0,0	17,0	20,0	17,0	20,0	0,0
21	14	15	2,0	0,0	20,0	22,0	20,0	22,0	0,0

Całkowity koszt skrócenia czasu realizacji projektu o cztery dni wyniesie 150 jednostek.

Odbędzie się to również kosztem rezerw czasowych na czynnościach niekrytycznych, w ramach posiadanych przez nich zapasów. Czynności takie staną się czynnościami krytycznymi. Sieć zależności po takiej akceleracji przedstawia rysunek 71.



Rysunek 71. Przebieg dróg i czynności krytycznych w sieci po skróceniu terminu realizacji do 22 dni

Widzimy, że skracania czasu realizacji projektów, oprócz wzrostu kosztów wiąże się również z pewnym napięciem organizacyjnym wynikłym z faktu, że coraz więcej czynności ma charakter krytyczny. Muszą więc rozpocząć i zakończyć się w sztywnych terminach, bez rezerw czasowych. Wykonanie takiej inwestycji w terminie skróconym jest obarczone pewnym ryzykiem.

Obliczmy zatem, korzystając z podanego sposobu, jaki jest minimalny możliwy termin wykonania tego zadania i ile wynosi dodatkowy koszt takiej operacji.

Wyniki obliczeń zawiera tabela 16, a sieć zależności dla takiego przedsięwzięcia przedstawia rysunek 72.

Tabela 16. Wyniki analizy skrócenia czasu $T_{15}^{0} = T_{15}^{1} = \min$ dni

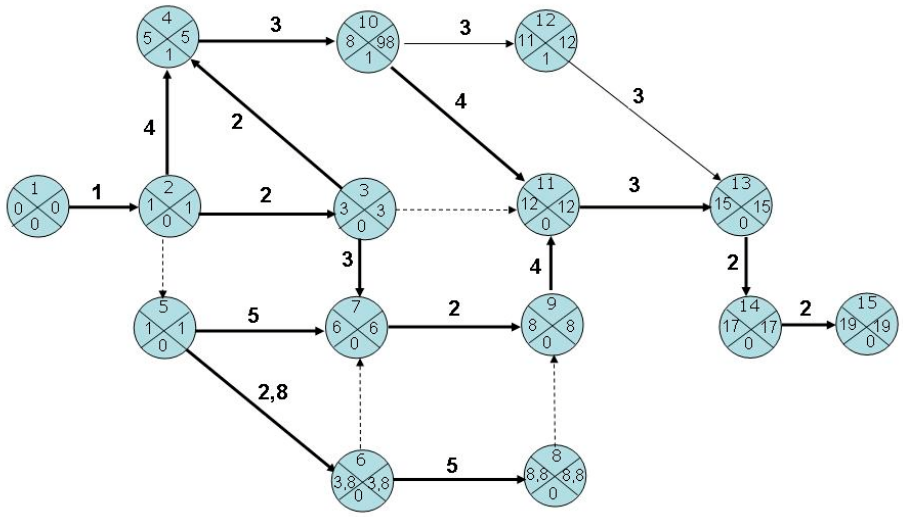
nr	i	j	t_{ij}^{I}	t_{ij}^{*}	Najwcześniejszy		Najpóźniejszy		Z_c^I
					początek	koniec	początek	koniec	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0	1,0	0,0
2	2	3	2,0	2,0	1,0	3,0	1,0	3,0	0,0
3	2	4	4,0	1,0	1,0	5,0	1,0	5,0	0,0
4	2	5	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0
5	3	4	2,0	0,0	3,0	5,0	3,0	6,0	0,0
6	3	7	3,0	1,0	3,0	6,0	3,0	6,0	0,0
7	3	11	0,0	0,0	3,0	3,0	12,0	12,0	9,0
8	4	10	3,0	3,0	5,0	8,0	5,0	8,0	0,0
9	5	6	2,8	0,2	1,0	3,8	1,0	3,8	0,0
10	5	7	5,0	0,0	1,0	6,0	1,0	6,0	0,0
11	6	7	0,0	0,0	3,8	3,8	6,0	6,0	2,2
12	6	8	5,0	0,0	3,8	8,8	3,8	8,8	0,0
13	7	9	2,0	1,0	6,0	8,0	6.0	8,0	0,0
14	8	9	-0,8	0,8	8,8	8,0	8,8	8,0	0,0
15	9	11	4,0	2,0	8,0	12,0	8,0	12,0	0,0
16	10	11	4,0	0,0	8,0	12,0	8,0	12,0	0,0
17	10	12	3,0	0,0	8,0	11,0	9,0	12,0	1,0
18	11	13	3,0	0,0	12,0	15,0	12,0	15,0	1,0
19	12	13	3,0	0,0	11,0	14,0	12,0	15,0	0,0
20	13	14	2,0	1,0	15,0	17,0	15,0	17,0	0,0
21	14	15	2,0	0,0	17,0	19,0	17,0	19,0	0,0

Maksymalne przyspieszenie terminu realizacji, jakie można uzyskać w warunkach ograniczonych czasami granicznymi t_{gr} wszystkich czynności wynosi

19 dni $(T_{15}^{0} = T_{15}^{1} = 19)$. Koszt takiej akceleracji obliczymy na z formuły $KA = \sum_{i=1}^{15} t_{ij}^{*} \cdot s_{ij}$.

Całkowity koszt akceleracji jest więc sumą iloczynu wielkości przyspieszenia poszczególnych czynności t_{ij}^{*} oraz odpowiednimi gradientami kosztów s_{ij}. i wynosi $KA_{19}=353$ jednostki.

Sieć zależności w przypadku tak skróconego terminu przedstawia rysunek 69.



Rysunek 72. Sieć zależności dla maksymalnego przyspieszenia terminu realizacji $(T_{15}^{0} = T_{15}^{1} = 19)$

W przedstawionej sieci zależności wszystkie czynności poza czynnościami 10–12 i 12–13 są czynnościami krytycznymi. Ich zapasy całkowite są równe zeru. Jest to najkrótszy z możliwych termin ukończenia całego przedsięwzięcia, wynoszący 19 dni, przy koszcie większym od kosztu normatywnego o 353 jednostki.

6.3.3. Analiza czasowo-kosztowa w sieciach z wykorzystaniem programowania liniowego

6.3.3.1. Minimalizacja kosztów przy zadanym czasie dyrektywnym

Korzystając jednak z możliwości jakie dają metody sieciowe, można poszukiwać optymalnych rozwiązań z punku widzenia albo czasu realizacji projektu albo kosztów wykonania. Ciekawe rozwiązania w zakresie takiej optyma-

lizacji proponuje T. Trzaskalik[9] [2003]. Dąży bowiem do minimalizacji kosztu realizacji przedsięwzięcia przy zadanym, nieprzekraczalnym czasie jego trwania, zwanym czasem dyrektywnym. Zagadnienie to sprowadza do sformułowania i rozwiązania odpowiedniego zadania programowania liniowego.

Przyjmijmy zatem proponowane tam oznaczenia:

przez x_i *(i=1,2,....15)* momenty zaistnienia zdarzeń 1–15 natomiast przez $y_1, y_2, \ldots y_{21}$ – czasy przyspieszenia realizacji czynności od 1 do 21 (oznaczenia czynności według tabeli 9).

Dla wyznaczenia kosztów przyspieszenia realizacji przedsięwzięcia, odpowiadającym zadanemu czasowi dyrektywnemu utwórzmy funkcję:

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, \ldots y_{21}) = {} & 0 \cdot y_1 + 40 \cdot y_2 + 25 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + 50 \cdot y_6 + \\ & + 0 \cdot y_7 + 20 \cdot y_8 45 \cdot y_9 + 16{,}6 \cdot y_{10} + 0 \cdot y_{11} + 13{,}3 \cdot y_{12} + \\ & + 30 \cdot y_{13} + 0 \cdot y_{14} + 20 \cdot y_{15} + 20 \cdot y_{16} + 0 \cdot y_{17} + 0 \cdot y_{18} + \\ & + 10 \cdot y_{19} + 60 \cdot y_{20} + 0 \cdot y_{21} \quad \rightarrow min \end{aligned}$$

Dla czynności oraz zdarzeń tworzących projekt zachodzą ponadto następujące zależności:

Moment zaistnienia zdarzenia *i* (czyli x_i,) musi być równy lub większy od momentu zakończenia czynności, dla których to zdarzenie jest zdarzeniem końcowym.

Czas rozpoczęcia dowolnej czynności jest równy momentowi zaistnienia zdarzenia, które dla tej czynności jest zdarzeniem początkowym.

Czas realizacji czynności jest równy czasowi normalnemu, pomniejszonemu o czas przyspieszenia y_i.

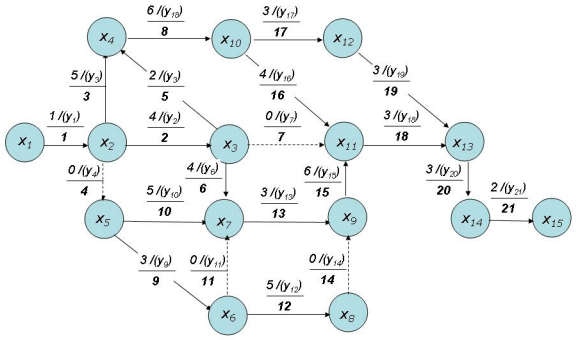
Stosując powyższe uwarunkowania, możemy sformułować ogólną zasadę:

$$x_j \geq t_i - y_i + x_i \tag{49}$$

gdzie:

x_j – moment zajścia zdarzenia następującego (kończącego czynność *i*),
t_i – czas normalny realizacji czynności *i,*
y_i – przyspieszenie czynności *i,*
x_i – moment rozpoczęcia czynności *i*.

[9] T. Trzaskalik, *Wprowadzenie do badan operacyjnych z komputerem*. PWE, Warszawa 2003, s. 313.



Rysunek 73. Schemat obliczeniowy optymalizacji kosztów przyspieszenia realizacji (metoda programowania liniowego)

Przedstawiony na schemacie (rys. 73) opis czynności podaje nad kreską normatywne czasy trwania czynności oraz w nawiasach szukane wielkości przyspieszeń, przy których realizowana jest funkcja kryterium programowania liniowego. Pod kreską podane są numery (nazwy) czynności. Na podstawie formuły (46) możemy, dla każdego zdarzenia zapisać:

dla zdarzenia 1:
$x_1 = 0$
dla zdarzenia 2:
$x_2 \geq t_1 - y_1 + x_1 = 1 - y_1 + x_1$
dla zdarzenia 3:
$x_3 \geq 2 - y_2 + x_2$
dla zdarzenia 4
$x_4 \geq 5 - y_3 + x_2$
$x_4 \geq 2 - y_5 + x_3$
dla zdarzenia 5:
$x_5 \geq 0 - y_4 + x_2$
dla zdarzenia 6:
$x_6 \geq 3 - y_9 + x_5$
dla zdarzenia 7:
$x_7 \geq 5 - y_{10} + x_5$
$x_7 \geq 4 - y_6 + x_3$
$x_7 \geq 0 - y_{11} + x_6$
dla zdarzenia 8:
$x_8 \geq 5 - y_{12} + x_6$

dla zdarzenia 9:
$x_9 \geq 3 - y_{13} + x_7$
$x_9 \geq 0 - y_{14} + x_8$
dla zdarzenia 10:
$x_{10} \geq 6 - y_{18} + x_4$
dla zdarzenia 11:
$x_{11} \geq 0 - y_7 + x_3$
$x_{11} \geq 6 - y_{15} + x_9$
$x_{11} \geq 4 - y_{16} + x_{10}$
dla zdarzenia 12:
$x_{12} \geq 3 - y_{17} + x_{10}$
dla zdarzenia 13:
$x_{13} \geq 3 - y_{18} + x_{11}$
$x_{13} \geq 3 - y_{19} + x_{12}$
dla zdarzenia 14:
$x_{14} \geq 3 - y_{20} + x_{13}$
dla zdarzenia 15:
$x_{15} \geq 2 - y_{21} + x_{14}$

Możliwości przyspieszenia poszczególnych czynności są ograniczone ich czasami granicznymi t_{gr}. Zatem wynikające z tego warunki ograniczające przyjmą ogólną postać:

$$0 \leq y_i \leq t_{gr} \tag{50}$$

Dla rozwiązywanego przykładu warunki ograniczające wielkość przyspieszeń każdej z czynności w grafie przyjmą postać:

$0 \le y_1 \le 1$	$0 \le y_8 \le 3$	$0 \le y_{15} \le 4$
$0 \le y_2 \le 2$	$0 \le y_9 \le 1$	$0 \le y_{16} \le 3$
$0 \le y_3 \le 3$	$0 \le y_{10} \le 2$	$0 \le y_{17} \le 3$
$0 \le y_4 \le 0$	$0 \le y_{11} \le 0$	$0 \le y_{18} \le 3$
$0 \le y_5 \le 2$	$0 \le y_{12} \le 2$	$0 \le y_{19} \le 1$
$0 \le y_6 \le 3$	$0 \le y_{13} \le 2$	$0 \le y_{20} \le 2$
$0 \le y_7 \le 0$	$0 \le y_{14} \le 0$	$0 \le y_{21} \le 2$

Załóżmy, że chcemy realizować nasze przedsięwzięcie w czasie nie dłuższym niż 22 dni. Oznacza to, że moment zajścia zdarzenia 15 (ostatnie zdarzenie w sieci), określający czas realizacji przedsięwzięcia, nie może przekroczyć wartości 22. Otrzymujemy więc dodatkowe ograniczenie w postaci:

$$x_{15} \le 22$$

Ponadto $x_1 = 0$ oraz wartości zmiennych $x_2, x_3, \ldots x_{15}$ muszą być nieujemne.

Sformułowane zadanie programowania liniowego, po dokonaniu prostych przekształceń można zapisać:

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, \ldots y_{21}) = {} & 0 \cdot y_1 + 40 \cdot y_2 + 25 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + 50 \cdot y_6 + \\ & + 0 \cdot y_7 + 20 \cdot y_8 45 \cdot y_9 + 16{,}6 \cdot y_{10} + 0 \cdot y_{11} + 13{,}3 \cdot y_{12} + \\ & + 30 \cdot y_{13} + 0 \cdot y_{14} + 20 \cdot y_{15} + 20 \cdot y_{16} + 0 \cdot y_{17} + 0 \cdot y_{18} + \\ & + 10 \cdot y_{19} + 60 \cdot y_{20} + 0 \cdot y_{21} \quad \to min \end{aligned}$$

$x_2 + y_1 \ge 1$	$-x_3 + x_7 + y_6 \ge 4$	$-x_9 + x_{11} + y_{15} \ge 6$
$-x_2 + x_3 + y_2 \ge 2$	$-x_6 + x_7 + y_{11} \ge 0$	$-x_{10} + x_{11} + y_{16} \ge 4$
$-x_2 + x_4 + y_3 \ge 5$	$-x_6 + x_8 + y_{12} \ge 5$	$-x_{10} + x_{12} + y_{17} \ge 3$
$-x_3 + x_4 + y_5 \ge 2$	$-x_7 + x_9 + y_{13} \ge 3$	$-x_{11} + x_{13} + y_{18} \ge 3$
$-x_2 + x_5 + y_4 \ge 0$	$-x_8 + x_9 + y_{14} \ge 0$	$-x_{12} + x_{13} + y_{19} \ge 3$
$-x_5 + x_6 + y_9 \ge 3$	$-x_4 + x_{10} + y_{18} \ge 6$	$-x_{13} + x_{14} + y_{20} \ge 3$
$-x_5 + x_7 + y_{10} \ge 5$	$-x_3 + x_{11} + y_7 \ge 0$	$-x_{14} + x_{15} + y_{21} \ge 2$
		$x_{15} \ge 22$

$0 \le y_1 \le 1$	$0 \le y_8 \le 3$	$0 \le y_{15} \le 4$
$0 \le y_2 \le 2$	$0 \le y_9 \le 1$	$0 \le y_{16} \le 3$
$0 \le y_3 \le 3$	$0 \le y_{10} \le 2$	$0 \le y_{17} \le 3$
$0 \le y_4 \le 0$	$0 \le y_{11} \le 0$	$0 \le y_{18} \le 3$
$0 \le y_5 \le 2$	$0 \le y_{12} \le 2$	$0 \le y_{19} \le 1$
$0 \le y_6 \le 3$	$0 \le y_{13} \le 2$	$0 \le y_{20} \le 2$
$0 \le y_7 \le 0$	$0 \le y_{14} \le 0$	$0 \le y_{21} \le 2$

$x_2, x_3, \ldots\ldots x_{15} \ge 0$

Po rozwiązaniu takiego układu równań liniowych z minimalizowaną funkcją celu, interesujące nas wartości zmiennych $y_1, y_2, \ldots\ldots y_{21}$ przyjmą wartości:

$y_1 = 0$	$y_8 = 1$	$y_{15} = 2$
$y_2 = 1$	$y_9 = 0$	$y_{16} = 1$
$y_3 = 0$	$y_{10} = 0$	$y_{17} = 0$
$y_4 = 0$	$y_{11} = 0$	$y_{18} = 0$
$y_5 = 0$	$y_{12} = 0$	$y_{19} = 0$
$y_6 = 0$	$y_{13} = 1$	$y_{20} = 0$
$y_7 = 0$	$y_{14} = 0$	$y_{21} = 0$

Najwcześniejsze terminy zajścia zdarzeń, przy których funkcja kryterium spełnia przyjmuje wartości minimalne przedstawione są poniżej:

$x_i = 0$	$x_6 = 4$	$x_{11} = 14$
$x_2 = 1$	$x_7 = 8$	$x_{12} = 14$
$x_3 = 4$	$x_8 = 9$	$x_{13} = 17$
$x_4 = 6$	$x_9 = 10$	$x_{14} = 20$
$x_5 = 1$	$x_{10} = 11$	$x_{15} = 22$

Koszt dodatkowy realizacji przedsięwzięcia w czasie nieprzekraczającym 22 jednostek wynosi 150. Sieć czynności ze zmodyfikowanymi czasami trwania poszczególnych czynności została przedstawiona na rysunku 62.

6.3.3.2. Minimalizacja czasu przy zadanym koszcie

Spróbujmy teraz rozwiązać problem i przyspieszenia realizacji projektu w odmienny sposób. Mając do dyspozycji określoną kwotę, pytamy, o ile możemy przyspieszyć realizację rozpatrywanego przedsięwzięcia.

W tym przypadku zmieni się funkcja kryterium, ponieważ chcemy nasze przedsięwzięcie zakończyć jak najprędzej.

Funkcja celu będzie miała postać:

$FC(x_{15}) = x_{15} \rightarrow \min$

Załóżmy, że koszt przyspieszenia nie może być większy niż 200 jednostek. Zapiszemy ten warunek następująco:

$$0 \cdot y_1 + 40 \cdot y_2 + 25 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 + 50 \cdot y_6 + 0 \cdot y_7 + 20 \cdot y_8 45 \cdot y_9 +$$
$$+ 16{,}6 \cdot y_{10} + 0 \cdot y_{11} + 13{,}3 \cdot y_{12} + 30 \cdot y_{13} + 0 \cdot y_{14} + 20 \cdot y_{15} + 20 \cdot y_{16} +$$
$$+ 0 \cdot y_{17} + 0 \cdot y_{18} + 10 \cdot y_{19} + 60 \cdot y_{20} + 0 \cdot y_{21} \leq 200$$

Pozostałe ograniczenia nie ulegają zmianie w stosunku do ograniczeń rozpatrywanych w punkcie. 6.3.3.1.

$x_2 + y_1 \geq 1$	$-x_3 + x_7 + y_6 \geq 4$	$-x_9 + x_{11} + y_{15} \geq 6$
$-x_2 + x_3 + y_2 \geq 2$	$-x_6 + x_7 + y_{11} \geq 0$	$-x_{10} + x_{11} + y_{16} \geq 4$
$-x_2 + x_4 + y_3 \geq 5$	$-x_6 + x_8 + y_{12} \geq 5$	$-x_{10} + x_{12} + y_{17} \geq 3$
$-x_3 + x_4 + y_5 \geq 2$	$-x_7 + x_9 + y_{13} \geq 3$	$-x_{11} + x_{13} + y_{18} \geq 3$
$-x_2 + x_5 + y_4 \geq 0$	$-x_8 + x_9 + y_{14} \geq 0$	$-x_{12} + x_{13} + y_{19} \geq 3$
$-x_5 + x_6 + y_9 \geq 3$	$-x_4 + x_{10} + y_{18} \geq 6$	$-x_{13} + x_{14} + y_{20} \geq 3$
$-x_5 + x_7 + y_{10} \geq 5$	$-x_3 + x_{11} + y_7 \geq 0$	$-x_{14} + x_{15} + y_{21} \geq 2$
		$x_{15} \geq 22$

$0 \leq y_1 \leq 1$	$0 \leq y_8 \leq 3$	$0 \leq y_{15} \leq 4$
$0 \leq y_2 \leq 2$	$0 \leq y_9 \leq 1$	$0 \leq y_{16} \leq 3$
$0 \leq y_3 \leq 3$	$0 \leq y_{10} \leq 2$	$0 \leq y_{17} \leq 3$
$0 \leq y_4 \leq 0$	$0 \leq y_{11} \leq 0$	$0 \leq y_{18} \leq 3$
$0 \leq y_5 \leq 2$	$0 \leq y_{12} \leq 2$	$0 \leq y_{19} \leq 1$
$0 \leq y_6 \leq 3$	$0 \leq y_{13} \leq 2$	$0 \leq y_{20} \leq 2$
$0 \leq y_7 \leq 0$	$0 \leq y_{14} \leq 0$	$0 \leq y_{21} \leq 2$

$x_2, x_3, \ldots\ldots x_{15} \geq 0$

W efekcie rozwiązanie takiego zadania z zakresu programowania liniowego umożliwia wyliczenie wartości szukanych parametrów:

$y_1 = 0$	$y_8 = 2{,}8$	$y_{15} = 1{,}7$
$y_2 = 2$	$y_9 = 0$	$y_{16} = 0$
$y_3 = 0$	$y_{10} = 0$	$y_{17} = 0$
$y_4 = 0$	$y_{11} = 0$	$y_{18} = 0$
$y_5 = 0$	$y_{12} = 0$	$y_{19} = 0$
$y_6 = 0$	$y_{13} = 1$	$y_{20} = 0$
$y_7 = 0$	$y_{14} = 0$	$y_{21} = 0$

Najwcześniejsze terminy zajścia zdarzeń, przy których funkcja kryterium spełnia przyjmuje wartości minimalne przedstawione są poniżej:

$x_i = 0$	$x_6 = 4$	$x_{11} = 13{,}3$
$x_2 = 1$	$x_7 = 7$	$x_{12} = 12{,}3$
$x_3 = 3$	$x_8 = 9$	$x_{13} = 16{,}3$
$x_4 = 6$	$x_9 = 9$	$x_{14} = 19{,}3$
$x_5 = 1$	$x_{10} = 9{,}3$	$x_{15} = 21{,}3$

Mając dodatkowo do dyspozycji 200 jednostek pieniężnych, możemy zrealizować przedsięwzięcie w czasie nie dłuższym niż 21,3 dni.

7. MODELE SIECIOWE O STOCHASTYCZNEJ STRUKTURZE LOGICZNEJ

Dotychczas omawiane modele sieciowe dotyczyły programów, których struktura logiczna była zdeterminowana. Oznacza to, że dla takich przedsięwzięć, konstrukcje sieci zależności oparte były na z góry określonych zestawach czynności wchodzących w skład analizowanego przedsięwzięcia. Przedsięwzięcie takie składa z ciągu czynności, które są wzajemnie z sobą powiązane. Czynności te muszą być wykonywane w określonej kolejności, ich wykonanie warunkuje wykonanie innych. Takie zależności pomiędzy zdarzeniami i czynnościami określają strukturą logiczną modelu sieciowego, która jest zdeterminowana, bowiem w trakcie realizacji takiego przedsięwzięcia wszystkie czynności przedstawione w sieci muszą być zrealizowane, aby całe przedsięwzięcie mogło być zakończone. Mówimy wtedy o sieciach zależności typu DAN (*Deterministic Analysis Network*).

Innym rodzajem sieci zależności przedstawiających przedsięwzięcia, w których tylko część czynności jest realizowana na pewno. Pozostałe mogą występować i być realizowane lub też mogą nie być realizowane wcale. Do graficznego przedstawienia takich relacji stosujemy sieci, których logiczna struktura ma charakter stochastyczny a przedstawione w niej czynność występują i są realizowane z określonym, większym od zera prawdopodobieństwem. Sieci, o tego typu strukturze nazywamy sieciami typu GAN (*Generalized Analysis Network*).

Na gruncie uogólnionych sieci czynności GAN utworzone zostały modele, które dają możliwość wielowariantowego ustalenia zależności między zdarzeniami oraz wybierania w toku realizacji przedsięwzięcia innych dróg postępowania niż pierwotnie zostały ustalone.

7.1. TECHNIKA GERT

7.1.1. Podstawowe założenia techniki GETR

W przypadku każdego projektu do osiągnięcia założonych celów konieczne jest właściwe współdziałanie wykonawców i optymalne wykorzystanie zasobów w poszczególnych jego fazach. Wymaga to zapewnienia możliwości przeprowadzania zmian w przydziale środków zależnie od zaistniałej sytuacji i dokonywa tego w sposób racjonalny. Pomocne może się okazać wówczas użycie sieci stochastycznych, których przykładem są sieci typu GERT. Są one wprawdzie bardziej złożone niż sieci deterministyczne (CPM i PERT), ale dają

możliwość wielowariantowego ustalenia zależności między zdarzeniami w tej samej sieci oraz swobodnego dobierania w toku realizacji projektu innych dróg postępowania niż pierwotnie ustalone. Wielowariantowość sieci stała się możliwa do przedstawienia dzięki wprowadzeniu przez H. Eisnera[10], a później dopracowana przez S.E. Elmaghraby'ego[11] nowego typu zdarzenia, które dotychczas, ze względu na alternatywny charakter rozwiązań, wymagały oddzielnego planowania. W technice GAN zdarzenie składa się z dwóch części: strony wejścia i strony wyjścia. Oprócz korzyści w postaci alternatywnych wejść zdarzeń omawiana technika pozwala uporządkować prawdopodobieństwa realizacji czynności i określić parametry, które charakteryzują bliżej te czynności, np. czasy trwania. Zaletą techniki GAN jest także uwzględnienie powtórzeń i sprzężeń zwrotnych w sieci[12].

Jedną z technik sieciowych opartych na stochastycznej strukturze logicznej jest technika GERT (*Graphical Evaluation and Review Technique*). Wykorzystano w niej elementy sieci GAN oraz reguły algebry grafów S. Elmaglaghraby'ego. Uwzględnienie w tych sieciach czynności alternatywne opisują przedsięwzięcia o stochastycznym (losowym) charakterze. W realizacji takich przedsięwzięć występują różnorodne zakłócenia. Zapis graficzny takiego przedsięwzięcia według techniki GETR uwzględnia, przyjmując inną niż w sieciach deterministycznych postać łuków i węzłów oraz parametrów opisujących alternatywny charakter czynności. Doświadczenie uzyskane ze stosowania metod sieciowych wskazuje, że bardziej efektywne jest wprowadzenie do sieci opisującej planowany projekt wszystkich prawdopodobnych czynności alternatywnych przed rozpoczęciem realizacji projektu niż zmiana sieci czynności w trakcie jego realizacji. Omawiana technika może mieć zastosowanie w przypadku wszystkich złożonych projektów i w skomplikowanych sytuacjach decyzyjnych. Przykładem mogą być prace badawcze czy projektowe, w których trudno jest przewidzieć rezultat każdej podjętej decyzji, w sposób jednoznaczny.

7.1.2. Schemat techniki GERT

Procedurę zastosowania metody GERT do przedsięwzięcia, o niezdeterminowanej logicznej strukturze należy rozpocząć od dokładnego opisania projektu za pomocą sieci stochastycznej. Oczywiście opis ten musi uwzględniać specyficzny dla tych sieci rodzaj zdarzeń i inny zapis czynności. Następnym etapem jest zebranie danych liczbowych charakteryzujących obciążenie poszczególnych

[10] H. Eisner, *A Generalized Network Approach to the Planning and Scheduling of a Research Project*, „Operational Research" 1962, vol. 10.

[11] S.E. Elmaghraby, *An Algebra for the Analysis of Generalized Activity Networks*, „Management Science" 1964, No. 3.

[12] R. Zuber, *Metody sieciowe w planowaniu przygotowania produkcji*. „Przegląd Organizacji" 1974, nr 10.

łuków sieci. Rozwiązanie sieci stochastycznej typu GERT wymaga redukcji, czyli przedstawienia jej w mniej skomplikowanej strukturze zastępczej, aby umożliwić określenie czasu i prawdopodobieństwa realizacji przedsięwzięcia oraz wyznaczenie tych czasów i prawdopodobieństw. Ostatnim etapem procedury GERT jest analiza i ocena wyników otrzymanych dzięki zastosowanym uproszczeniom sieci.

Poniżej przedstawione zostaną szczegóły wymienionej procedury GERT.

7.1.2.1. Opisanie przedsięwzięcia za pomocą sieci stochastycznej

Występujące w sieciach stochastycznych pojęcie zdarzenia rozszerzono w porównaniu z powszechnym rozumieniem tego terminu w technikach opierających się na sieciach o strukturze deterministycznej. W sieci GERT rozróżnia się dwa podstawowe typy zdarzeń: deterministyczne, przedstawione w postaci koła oraz probabilistyczne, przedstawione w postaci „kropli". Należy zaznaczyć, że wszystkim łukom (czynnościom) wychodzącym ze zdarzeń zdeterminowanych odpowiada prawdopodobieństwo realizacji $p = l$, tzn. muszą być one wykonane, aby projekt uznano za zrealizowany. Natomiast w przypadku gałęzi wychodzących ze zdarzeń probabilistycznych tylko jedna z nich, o określonym prawdopodobieństwie wystąpienia p, wystarcza do doprowadzenia realizacji projektu do końca. Wymaga to zastosowania różnych typów węzłów (wierzchołków grafu w sieci GERT). Węzły w tej sieci mogą mieć jednocześnie różne typy wejść i wyjść, po to aby móc wyrazić losowość wystąpienia czynności wchodzących do węzła (zdarzenia końcowego), jak również prawdopodobieństwo tego, że czynność biorąca początek w tym węźle może, lub nie musi wystąpić.

Określono trzy logiczne relacje wejścia: *alternatywa rozłączna*, *alternatywa łączna* i *koniunkcja* oraz dwa typy relacji wyjścia: *deterministyczn*e i *probabilistyczne*.

Logiczne formy wierzchołków od strony wejścia w sieci GERT określono następująco:

– „i — dla zdarzeń, które zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynności je poprzedzające zostaną zrealizowane, tzn. pierwsze „i" drugie „i" następne. Realizowana jest w tym przypadku logiczna operacja „i". Skuteczne zakończenie przedsięwzięcia jest uwarunkowane wystąpieniem czynności „pierwszej" , „drugie" i „wszystkich następnych" (*alternatywa rozłączna),*

– „lub"„ — dla zdarzeń poprzedzonych kilkoma czynnościami moment realizacji zdarzenia jest zapewniony, gdy co najmniej jedna z czynności poprzedzających je zostanie zrealizowana, ale mogą zostać zrealizowane również inne czynności, dla których to zdarzenie jest zdarzeniem końcowym. Termin realizacji tych zdarzeń uwarunkowany jest najkrótszym czasem czynności dochodzących do takiego zdarzenia. Realizowana jest logiczna operacja „lub" (*alternaty-*

wa łączna). Np. jeśli szukamy najlepszego rozwiązania problemu warunkującego dalsze prace, to po znalezieniu pierwszego, możliwego do przyjęcia rozwiązania – kontynuujemy prace, nie przerywając poszukiwania rozwiązania najlepszego.

– „albo" „i" — dla zdarzeń, które zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy dokładnie jedna z czynności poprzedzających je zostanie zrealizowana. Zdarzenie jest poprzedzone czynnościami wzajemnie się wykluczającymi. Moment realizacji zdarzenia oznacza zakończenie jednej i tylko jednej czynności. Realizowana jest logiczna operacja „wykluczające — lub" (koniunkcja).

Logiczne formy wierzchołków w sieciach GERT od strony wyjścia ograniczone są do dwóch rodzajów:

– „i" — wyjście deterministyczne dotyczące zdarzeń, których wystąpienie powoduje realizację każdej czynności następującej po takich zdarzeniach. Jedna czynność lub kilka muszą występować po takim węźle. Moment zajścia zdarzenia oznacza możliwość rozpoczęcia wszystkich tych czynności. Realizowana jest logiczna operacja „i".

– „lub")" —„wyjście probabilistyczne" dotyczące zdarzeń, których wystąpienie powoduje realizację co najmniej jednej czynności po nich następującej. Z kilku wychodzących czynności zrealizowana może być jedna lub kilka. Zestawienie możliwych typów relacji logicznych i ich symboli przedstawiono w tabeli 17.

Tabela 17. Charakterystyka wierzchołków występujących w sieciach stochastycznych typy GERT

Wejście / Wyjście		Alternatywa rozłączna	Alternatywa rozłączna	Koniunkcja
Deterministyczne				
Probabilistyczna				

Źródło: K. Kukuła, Badania operacyjne w przykładach i zadaniach PWN Warszawa 2002

Zarówno wejście, jak i wyjście zdarzeń sieci deterministycznych mają formę logiczną „i". W sieciach o strukturze probabilistycznej zapis logiczny strony wejścia określa uwarunkowanie zaistnienia zdarzenia. Zapis strony wyjścia może mieć charakter decyzyjny. Po zaistnieniu zdarzenia decydują się losy realizacji czynności po nim następujących, zgodnie z logiką wyjścia. Charakter tych decyzji uważa się za deterministyczny, gdy realizacja sieci zależności wymaga realizacji wszystkich czynności następujących po zdarzeniu. Jeśli zapis wyjścia ze zdarzenia pozwala na realizację tylko niektórych czynności, to w stosunku do czynności następnych można mówić jedynie o realizacjach prawdopodobnych. Sieć taka nazywana jest siecią stochastyczną, na której oparta jest

technika GERT. Suma prawdopodobieństw odpowiadających poszczególnym gałęziom wychodzącym ze zdarzenia probabilistycznego musi być równa 1.

Poza omówionymi już typami zdarzeń, w modelach sieciowych GERT można wyróżnić zdarzenie początkowe (źródłowe) i zdarzenie końcowe. Zdarzenie początkowe może być zdarzeniem probabilistycznym, natomiast zdarzenie końcowe zawsze jest zdarzeniem deterministycznym. Cechą charakterystyczną modeli GERT są pętle, tzw. sprzężenia zwrotne. Pętle wskazują, że pewne działania mogą być wykonane więcej niż jeden raz. W sieci GERT podaje się liczbę powtórzeń (licznik) realizacji takich czynności. Pętla rozpoczyna się w tzw. zdarzeniu statystycznym, a zdarzenie, w którym pętla dochodzi do zwykłego ciągu czynności, nazywa się zdarzeniem wyróżnionym.

Przykładem opisu przedsięwzięcia za pomocą sieci stochastycznej może być postępowanie decyzyjne w sprawie budowy prototypowej oczyszczalni ścieków. Rada gminy o wyraźnie zarysowanej wiodącej funkcji turystycznej, zlokalizowanej w rejonie o szczególnych walorach środowiskowych, podjęła decyzję o budowie zbiorczej oczyszczalni ścieków. Problem gospodarki ściekowej w rejonach o wyróżnionej funkcji turystycznej jest wyjątkowo ważny dla podtrzymania walorów środowiskowych determinujących jej funkcję turystyczną. Jednocześnie jednak na terenie gminy funkcjonuje szereg uciążliwych dla środowiska zakładów (mleczarnie, ubojnie, garbarnie itp.), które emitując trudno oczyszczalne ścieki zagrażają walorom środowiskowym. Powstaje zatem problem wyboru odpowiedniej technologii oczyszczania ścieków, zarówno komunalnych, jak i ścieków pochodzących z wymienionych zakładów przemysłowych. Specyficzny, z uwagi na skład i natężenie ładunków, rodzaj ścieków emitowanych z całego obszaru gminy nie zezwala na zastosowanie typowej oczyszczalni. Rada gminy zidentyfikowała problem decyzyjny następująco:

– Możliwe jest opracowanie zupełnie nowej wielostopniowej technologii oczyszczania ścieków uwzględniającej ich specyficzny charakter (wartiant A). Przyjęcie tego rozwiązania uwarunkowane jest pozytywnymi wynikami testów laboratoryjnych z przeprowadzanych prób.

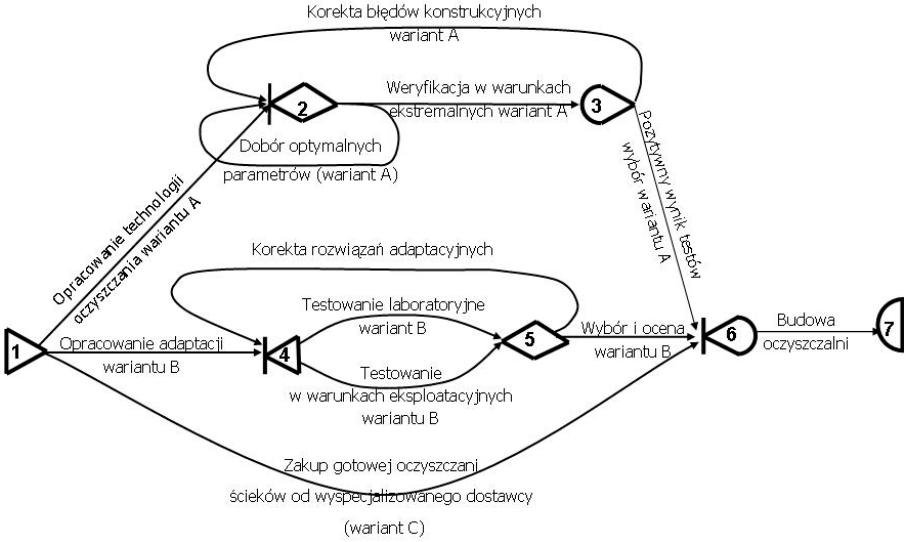
– Jest również możliwe adaptowanie istniejących oczyszczalni ścieków o sprawdzonych konstrukcjach i skutecznie oczyszczających ścieki w rejonach recepcyjnych o podobnym układzie funkcji gospodarczych. Przyjęcie tego rozwiązania wymaga również przeprowadzania kontrolnych badań laboratoryjnych sprawdzających efekt adaptacyjny (wariant B).

– Jest wreszcie możliwy do przyjęcia wariant C, polegający na zakupieniu od wyspecjalizowanego dostawcy gotowych rozwiązań i części niezbędnych do zbudowania oczyszczalni, o gwarantowanym stopniu oczyszczania.

Z każdym z możliwych rozwiązań wiążą się określone czynności prowadzące do wyboru wariantu ostatecznego. W przypadku wyboru wariantu A konieczne może być uzupełnienie sporządzonej dokumentacji technicznej po wstępnym opracowaniu, podobnie w wyniku weryfikacji dalszych opracowań

testy laboratoryjne — być może założenia wybranego wariantu trzeba będzie poprawić. Powstaną zatem swoiste pętle powtarzających się czynności w zależności od jakości powstałych rozwiązań — albo będą one zaakceptowane, albo trzeba je będzie poprawić. W ostatecznym rozrachunku jeden z dwóch wariantów lub być może nawet oba mogą zostać odrzucone na rzecz wariantu zakupu gotowej oczyszczalni.

Nie przesądzając o ekonomicznej efektywności poszczególnych rozwiązań, który z trzech wariantów ma większe szanse powodzenia realizacji, zapiszmy to przedsięwzięcie w konwencji grafów o stochastycznej strukturze logicznej techniką GERT. Omówioną sytuację ilustruje rysunek 74.



Rysunek 74. Przykład ilustracji przedsięwzięcia: wybór koncepcji i budowa oczyszczalni ścieków za pomocą sieci stochastycznej GERT

Wyjście ze zdarzenia 1 jest wyjściem probabilistycznym, ponieważ w celu budowy oczyszczalni możliwe jest opracowanie unikalnej technologii oczyszczania i wykonanie oczyszczalni (wariant A), adaptacja sprawdzonej w podobnych warunkach technologii oczyszczania uwarunkowanej pozytywnymi wynikami testów laboratoryjnych (wariant B) lub zakup gotowej oczyszczalni ścieków o gwarantowanym stopniu oczyszczania od dostawcy zewnętrznego (wariant C). Wyjście zdarzenia 2 również jest wyjściem probabilistycznym, ponieważ w wyniku opracowania technologii (wariant A) możliwe jest dalsze jej usprawnienie poprzez regulację i ustawienie parametrów pracy oczyszczalni, lub w przypadku pozytywnych wyników konieczna jest dalsza weryfikacja opracowanej technologii w procesie symulowania ekstremalnych warunków eksploatacyjnych.

Wejście do zdarzenia 2 będzie wejściem typu „albo”, ponieważ realizacja zdarzenia może nastąpić w wyniku zakończenia jednej z trzech czynności wzajemnie się wykluczających: albo w wyniku opracowania technologii (wariant A), albo na skutek koniecznych regulacji w celu uzyskania optymalnych parametrów oczyszczania, albo po korekcie błędów w konstrukcyjnych.

Wyjście zdarzenia 3 jest probabilistyczne, ponieważ w wyniku jego wystąpienia możliwa jest pozytywna ocena i wybór wariantu A lub też pojawia się konieczność dokonania poprawek w konstrukcji i powrót do zdarzenia drugiego.

Podobnie wygląda opis zdarzeń przy opracowaniu wariantu B, jednak w tym przypadku wejście do zdarzenia 5 będzie miało charakter alternatywny „lub”. Zdarzenie 5 wystąpi bowiem, gdy skończy się którakolwiek z czynności je poprzedzających, a więc testowanie opracowanej adaptacji poprzez badania laboratoryjne lub testowanie w warunkach eksploatacyjnych.

Wejście zdarzenia 6 ma charakter alternatywy rozłącznej „albo”, ponieważ do budowy oczyszczalni będzie wykorzystany tylko jeden z trzech rozważanych wariantów; albo wariant A albo wariant B albo wariant C.

Wyjście ze zdarzenia 6 jest natomiast zdeterminowane, ponieważ po podjęciu decyzji co do wyboru wariantu nastąpi budowa oczyszczalni.

7.1.2.2. Dane liczbowe charakteryzujące obciążenie poszczególnych łuków sieci

Opracowana przez H. Eisnera typologia wierzchołków sieci pozwala wykorzystać do opisu technik sieciowych grafy przepływu sygnałów SFG (*Signal Flow Graphs*). Grafy przepływu sygnałów zostały wprowadzone przez S.J. Masona[13] przy analizie obwodów elektrycznych.

Graf SFG definiowany jest jako para uporządkowana $G = \langle W, T \rangle$, gdzie:

$\langle W, T \rangle$ – pewien układ równań liniowych,

W – skończony zbiór wierzchołków w_i czyli $W = \{w_i\}$; wierzchołek w_i oznacza pewne zmienne, np. stany, czynności, warianty,

T – skończony zbiór transmitancji[14] t_{ij} – transmitancja wierzchołka w_i, na wierzchołek w_j może być rozumiana jako obciążenie grafu, np. czas zmiany stanu z w_i na $w_j(\tau_{ij})$ lub prawdopodobieństwo zmiany stanu z w_i na $w_j(p_{ij})$; czyli $T = \{t_{ij} 0\}$; transmitancja określona jest na skończonym zbiorze U par uporządkowanych $\langle w_i, w_j \rangle$ czyli $U = \{\langle w_i, w_j \rangle\}$; każdą taką parę uporządkowaną można oznaczyć symbolem u_{ij} czyli $u_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle$; możliwe są transmitancje t_{ji} odwrotne do transmitancji t_{ij}, przy czym w ogólnym przypadku $t_{ji} \# t_{ij}$,

[13] W. Radzikowski, *Matematyczne techniki zarządzania*. PWE Warszawa 1980.

[14] M. Trocki, B. Grucza, K. Ogonek, *Zarządzanie projektami.* Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne. Warszawa 2003.

U_{ij} – zależności funkcyjne między wierzchołkami w_i oraz w_j nazywane są łukiem, jeżeli $w_i \# w_j$, a jeżeli $w_i = w_j$ – pętlą pierwszego rzędu,

S – zbiór par uporządkowanych $\{ u_{ij}, u_{jk}, u_{kl}, u_{li} \}$, nazywany pętlą drugiego rzędu czyli cyklem.

W rozpatrywanym przypadku budowy oczyszczalni węzłami grafu będą zdarzenia — określające osiągnięcie pewnego stanu oznaczone kolejnymi liczbami naturalnymi; zależności funkcyjne pomiędzy węzłami, czyli łuki, oznaczone będą nazwami czynności; danymi opisującymi obciążenie poszczególnych łuków sieci będą: prawdopodobieństwo wykonania czynności oraz czas jej trwania.

W skład przedsięwzięcia wchodzą następujące czynności:

– opracowanie wariantu A, czynność, której prawdopodobieństwo realizacji wynosi 45% ($p_1 = 0,45$), natomiast czas wykonania ocenia się na 8 tygodni ($t_1 = 8$),

– opracowanie wariantu A może wymagać przeprowadzenia testów laboratoryjnych, może to się zdarzyć z prawdopodobieństwem 20% ($p_2 = 0,2$) a przewidywany czas wykonania tych testów wynosi 2 tygodnie ($t_2 = 2$),

– z prawdopodobieństwem 80% ($p_3 = 0,8$) możemy jednak przyjąć, że przeprowadzenie testów laboratoryjnych nie będzie konieczne i pozostanie tylko konieczność przeprowadzenia badań symulacyjnych warunki ekstremalne, czas takich badań wynosi 4 tygodnie ($t_3 = 4$),

– wynik tych badań może być korzystny lub niekorzystny, z prawdopodobieństwem wynoszącym 20% ($p_4 = 0,2$) wymagana będzie korekta błędów konstrukcyjnych prototypowej oczyszczalni; czynność ta będzie trwała 4 tygodnie ($t_4 = 4$),

– z prawdopodobieństwem 80% ($p_5 = 0,8$), że prototypowa oczyszczalnia ścieków zostanie poddana ostatecznej ocenie i wybór wariantu A będzie rozważony wraz z innymi wariantami, czas trwania tej czynności wynosi 1 tydzień ($t_5 = 1$),

– drugim alternatywnym sposobem budowy oczyszczalni jest możliwość skorzystania z gotowych rozwiązań poddanych adaptacji; przyjęcie tego rozwiązania jest jednak mniej prawdopodobne; ($p_6 = 0,25$) natomiast czas wykonania takiej adaptacji jest krótszy i wynosi 2 tygodnie ($t_6 = 2$),

– opracowanie przyjęte w wariancie B może zostać poddane testowaniu laboratoryjnym z prawdopodobieństwem 40% ($p_7 = 0,4$), a czas takiego badania laboratoryjnego wynosi 2 tygodnie ($t_7 = 2$),

– z prawdopodobieństwem równym 60% ($p_8 = 0,6$) można założyć, że badania laboratoryjne nie będą konieczne, a pozostaną testy wykonane w warunkach eksploatacyjnych; przewidywany czas takich badań wynosi 4 tygodnie ($t_8 = 4$),

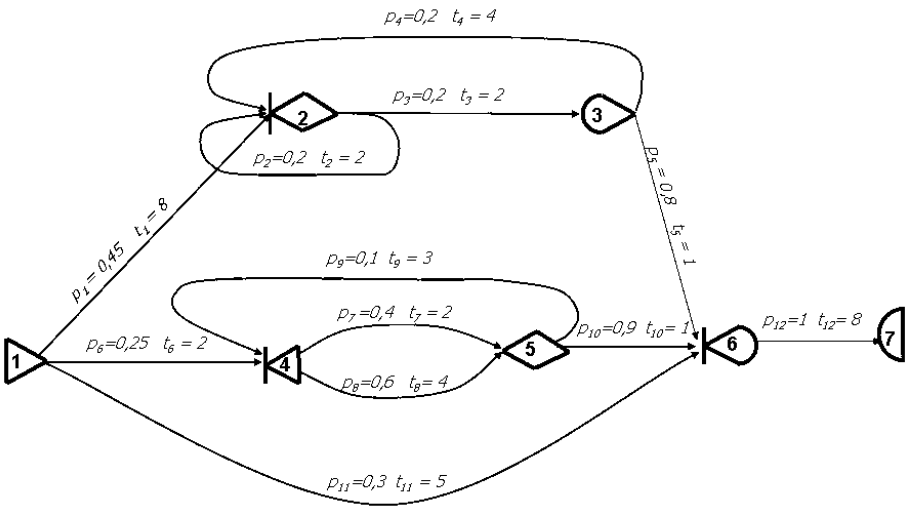
– w wyniku przeprowadzonych badań nad adaptowaną oczyszczalnią ścieków może wystąpić konieczność korekty rozwiązań adaptacyjnych z prawdopodobieństwem 10% ($p_9 = 0,1$) i zajmie to 3 tygodnie ($t_9 = 3$),

– albo też, z prawdopodobieństwem 90% *(p_{10} = 0,9)* nastąpi pozytywna ocena wariantu B i jego wybór; procedura ta będzie trwać 1 tydzień *(t_{10}=1)*,

– zakup gotowej oczyszczalni ścieków od wyspecjalizowanego dostawcy, z gwarantowanym stopniem oczyszczania – jako alternatywa do dwóch poprzednich rozwiązań jest możliwy z prawdopodobieństwem 30% *(p_{11} = 0,3)* a procedura zakupu trwać 5 tygodni *(t_{11} = 5)*,

– po dokonaniu przez radę gminy ostatecznego wyboru jednego z trzech wariantów nastąpi budowa oczyszczalni ścieków: czyli ta czynność jest pewna *(p_{12} = 1)* a realizacja jej będzie trwała 8 tygodni *(t_{12} = 8)*.

Opisaną sytuację przedstawia rysunek 75.



Rysunek 75. Graf GERT budowy oczyszczalni ścieków
z danymi liczbowymi charakteryzującymi obciążenia poszczególnych łuków

7.1.2.3. Redukowanie sieci stochastycznej

Etap redukowania sieci stochastycznej polega na upraszczaniu sieci różnymi metodami, aż do wyznaczenia mniej skomplikowanej sieci zastępczej, która jednoznacznie opisuje sieć oryginalną.

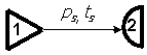
W przypadku techniki GERT, w celu przeprowadzenia analizy sieci stochastycznych, dokonuje się wielu kolejnych uproszczeń ich struktury. Prowadzą one do prostych, elementarnych połączeń czynności, których przeliczenie nie sprawia trudności. Kolejne redukcje sieci polegają na stopniowym zastępowaniu łuków, równoległych, rozgałęzień i pętli łukami zastępczymi. Po przeprowadzeniu odpowiedniej liczby etapów redukcji można otrzymać sieć zredukowaną do postaci elementarnej lub nawet do pojedynczej czynności.

W dalszych rozważaniach należy przyjąć, że każdy łuk sieci jest opisany przez dwuwymiarowy wektor $[p_i, t_i]$, gdzie: p, jest prawdopodobieństwem realizacji łuku i, pod warunkiem, że węzeł, z którego on wychodzi, został zrealizowany, zaś t oznacza czas trwania czynności odpowiadającej łukowi i. Czasy trwania czynności są wielkościami deterministycznymi.

Poniżej przedstawiono kilka charakterystycznych przypadków redukcji fragmentów sieci zależności GERT, z uwzględnieniem elementów algebry grafów:

Redukcja czynności szeregowych
Układ czynności przed redukcją

Układ czynności po redukcji



W przypadku redukcji czynności szeregowych dwie czynności i oraz j; można zastąpić jednym łukiem s o parametrach:

$$p_s = p_i p_j \tag{51}$$

(prawdopodobieństwo transmitancji węzła 2 na węzeł 3 oblicza się, wykorzystując prawo iloczynu prawdopodobieństw)

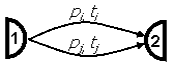
$$t_s = t_1 + t_j \tag{52}$$

(czas oczekiwany transmitancji węzła 2 na węzeł 3, czyli oczekiwany czas wystąpienia zdarzenia dla zredukowanego ciągu czynności).

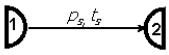
Realizacja węzła pozostaje w bezpośrednim związku z prawdopodobieństwem czynności skierowanej do tego węzła. Prawdopodobieństwo węzła wynika z prawdopodobieństwa czynności. Od węzła wychodzą czynności, które są pojmowane jako alternatywy z określonym prawdopodobieństwem wystąpienia. Podobnie jest z wartościami czasów trwania t odnoszącymi się do czynności i oznaczającymi oczekiwaną wartość terminu wystąpienia zdarzenia, na które są skierowane czynności z odpowiednimi prawdopodobieństwami.

Redukcja dwóch łuków równoległych
sytuacja pierwsza – połączenia według typu – „i„

Układ czynności przed redukcją



Układ czynności po redukcji



W tym przypadku dwie czynności i oraz j można zastąpić jednym łukiem s o parametrach:

$$p_s = p_i p_j \tag{53}$$

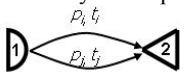
Analogicznie jest w przypadku wystąpienia *n* czynności, gdy wszystkie czynności wychodzące z węzła zdarzenia 1 są skierowane na zdarzenie 2, ze względu na deterministyczny typ wyjścia zdarzenia 1 prawdopodobieństwo wystąpienia wszystkich czynności jest jednakowe i wynosi:

$$p_i = p_j = p_n = 1 \tag{54}$$

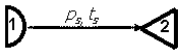
$$t_s = max\{t_i, t_j\} \tag{55}$$

Gdy kilka czynności przebiega jednocześnie i wszystkie muszą być zrealizowane, aby spełnić cel, tzn. zrealizować zdarzenie, oczekiwana wartość czasu wystąpienia tego zdarzenia będzie określona przez czynność o najdłuższym czasie.

Redukcja dwóch łuków równoległych
sytuacja druga – połączenia według typu – „i„
Układ czynności przed redukcją



Układ czynności po redukcji



W przypadku redukcji łuków równoległych – sytuacja druga – dwie czynności *i* oraz *j* można zastąpić jednym łukiem *s* o parametrach:

$$p_s = p_i p_j \tag{56}$$

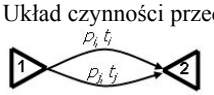
Gdy wszystkie czynności wychodzące z węzła 1 są skierowane na węzeł 2, ze względu na deterministyczny typ wyjścia zdarzenia 1, prawdopodobieństwo wystąpienia wszystkich czynności jest jednakowe i wynosi:

$$p_i = p_j = p_n = 1 \tag{57}$$

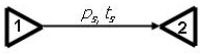
$$t_s = min\{t_i, t_j\} \tag{58}$$

W sytuacji, gdy kilka czynności przebiega jednocześnie, to dowolna jedna zrealizowana spełnia cel, tzn. realizację zdarzenia. Oczekiwana wartość czasu (termin) wystąpienia tego zdarzenia będzie określona przez czynność o najkrótszym czasie.

Redukcja dwóch łuków równoległych
sytuacja trzecia – połączenia według typu – „lub„
Układ czynności przed redukcją



Układ czynności po redukcji



W przypadku redukcji łuków równoległych – sytuacja trzecia – czynności *i* oraz *j* można zastąpić jednym łukiem *s* o parametrach:

$$p_s = p_i + p_j \tag{59}$$

$$t_s = \frac{p_i t_i + p_j t_j}{p_i + p_j} \tag{60}$$

Wszystkie czynności wychodzące z węzła 1 są od siebie niezależne.

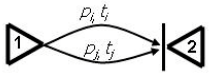
W przypadku wystąpienia n czynności równoległych, kiedy nie wszystkie czynności wychodzące z węzła zdarzenia 1 są skierowane na zdarzenie 2, można otrzymać następujące wzory ogólne:

$$p_n = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) \tag{61}$$

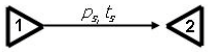
powyższa formuła oznacza prawdopodobieństwo, że zostanie zrealizowana co najmniej jedna z czynności, jest to więc prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia 2, natomiast wartość oczekiwana terminu wystąpienia zdarzenia 2 można zapisać następująco:

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i p_i \prod_{i=1}^{n} (1 - p_{i-1}) \tag{62}$$

Redukcja dwóch łuków równoległych
sytuacja czwarta – połączenia według typu – „albo„
Układ czynności przed redukcją



Układ czynności po redukcji

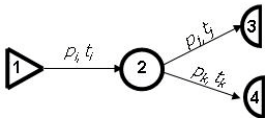


W przypadku redukcji łuków równoległych – sytuacja czwarta – czynności *i* oraz *j* można zastąpić jednym łukiem *s* o parametrach:

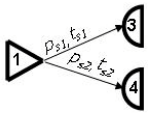
$$p_s = p_i + p_j \tag{63}$$

$$t_s = p_i t_i + p_j t_j \tag{64}$$

Redukcja rozgałęzienia
Układ czynności przed redukcją



Układ czynności po redukcji

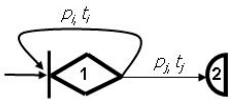


Układ o redukcji charakteryzuje się następującymi parametrami:

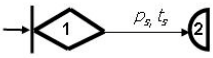
$$p_{s1} = p_i p_j, \qquad \mathrm{p}_{s2} = p_i p_k \tag{65}$$

$$t_{s1} = t_{ti} + t_j, \qquad \mathrm{t}_{s2} = t_i + t_k \tag{66}$$

Redukcja samosprzężenia
Układ czynności przed redukcją



Układ czynności po redukcji



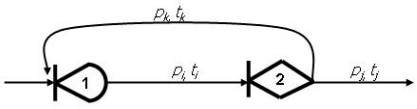
Podjęcie niewłaściwych kroków działania, które w swoich zamierzeniach mają doprowadzić do założonych celów, zdarza się bardzo często w trakcie realizacji, szczególnie przedsięwzięć o bardzo skomplikowanej strukturze. W takiej sytuacji wykonane czynności nie doprowadzą do oczekiwanego stanu i należy wówczas czynności powtórzyć. Powtarzanie się czynności nabiera szczególnego znaczenia w sytuacjach występowania czynności z określonym prawdopodobieństwem i z możliwością wyboru spośród alternatyw najwłaściwszych rozwiązań. W sieci GERT ilustracją omówionego problemu jest tzw. pętla (samosprzężenia).

Układ zredukowany charakteryzuje się następującymi parametrami:

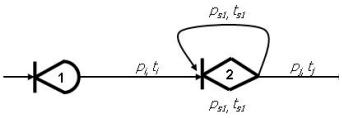
$$p_s = \frac{p_j}{1 - p_i} \tag{67}$$

$$t_s = t_j + \frac{p_i t_i}{1 - p_i} \tag{68}$$

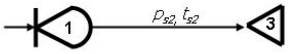
Redukcja sprzężenia zwrotnego
Układ czynności przed redukcją



Układ zredukowany z pętlą



Układ zredukowany bez pętli



Oprócz samosprzężenia w przedsięwzięciach złożonej strukturze może dojść do sprzężenia zwrotnego, czyli sytuacji cofnięcia się do zdarzenia oddalonego o więcej niż jedną czynność. Może to nastąpić w związku z koniecznością

powtórzenia całego ciągu czynności. W sieci GERT taką sytuację ilustruje sprzężenie zwrotne. Dla fragmentu sieci zawierającego sprzężenie zwrotne można przeprowadzić redukcję, w wyniku której otrzymuje się układ zastępczy bez sprzężenia zwrotnego. Układ zredukowany z pętlą charakteryzuje się następującymi parametrami:

$$p_{s1} = p_i p_k \tag{69}$$

Oczekiwana wartość czasu dla uproszczonej struktury przyjmie postać:

$$t_{s1} = t_i + t_k \tag{70}$$

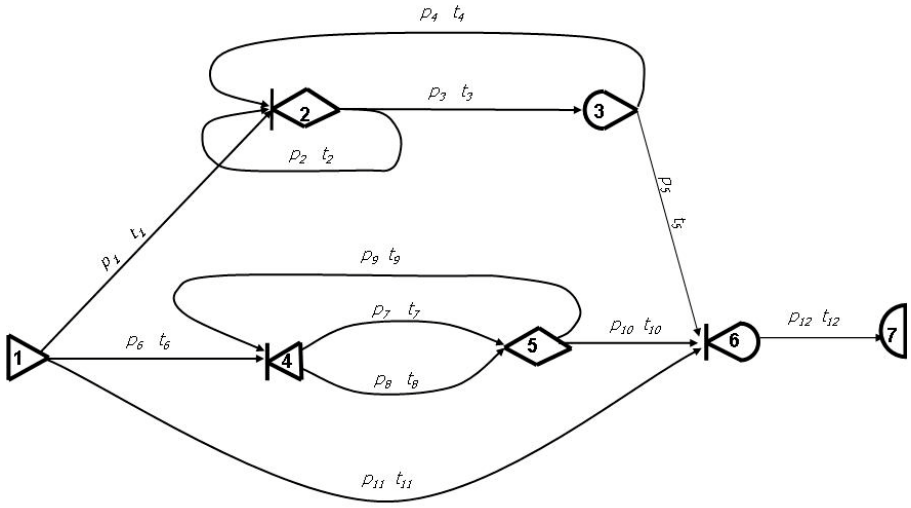
Jeżeli wyjściowy układ czynności z pętlą będziemy chcieli zredukować do jednego łuku zastępczego 1–3, to będzie on miał postać określoną parametrami:

$$p_{s2} = \frac{p_i p_j}{1 - p_i p_k} \tag{71}$$

$$t_{s2} = t_i + t_j + \frac{p_i p_k (t_i + t_k)}{1 - p_i p_k} \tag{72}$$

Praktyczne zastosowanie powyższych reguł redukcji jest dość uciążliwe i wymaga dużej wprawy oraz wielu skomplikowanych obliczeń.

Powróćmy do rozpatrywanego projektu budowy oczyszczalni ścieków, przedstawionego ponownie w postaci schematu obliczeniowego (rys. 63).



Rysunek 76. Sieć stochastyczna budowy oczyszczalni ścieków przed redukcją

Upraszczanie sieci należy rozpocząć od zredukowania pętli wokół węzła 2 (korzystając ze wzorów (6.1) i (6.2), a także zastąpienia dwóch łuków równoległych między węzłami 4 i 5 jednym łukiem. Po tej operacji łuk między węzłami 2 i 3 będzie charakteryzował się następującymi parametrami:

$$p_{s1} = \frac{p_3}{1 - p_2}$$

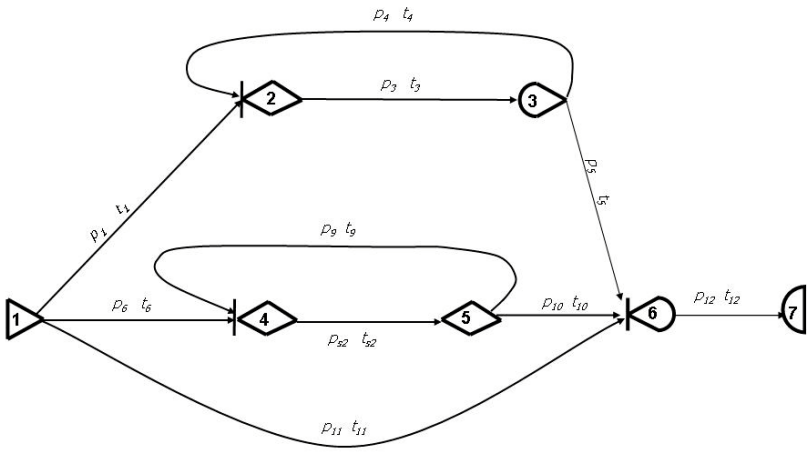
$$t_{s1} = t_3 + \frac{p_2 t_2}{1 - p_2}$$

Przy redukcji łuków równoległych między węzłami 4 i 5 można skorzystać ze wzorów (6.9) i (6.10); otrzyma się wówczas łuk zastępczy o parametrach:

$$p_{s2} = p_7 + p_8$$

$$t_{s2} = \frac{p_7 t_7 + p_8 t_8}{p_7 + p_8}$$

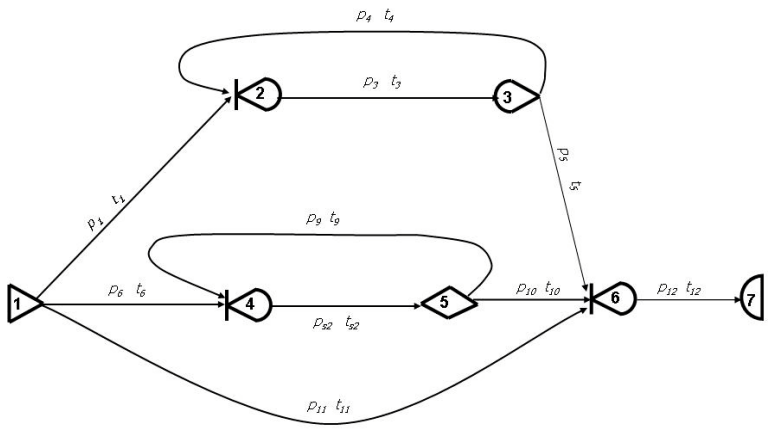
W wyniku przeprowadzonych uproszczeń powstanie sieć zredukowana przedstawiona na rysunku 77.



Rysunek 77. Sieć stochastyczna GERT po redukcji pętli wokół węzła 2 i dwóch łuków równoległych 4–5

Aby zachować strukturę logiczną sieci po dokonanych uproszczeniach, należy sprawdzić poprawność stochastyczną wejść i wyjść z węzłów zdarzeń oraz wprowadzić ewentualne poprawki. W omawianym przykładzie w wyniku redukcji pętli i łuków równoległych powstały łuki zastępcze, które zmieniły

relacje logiczne między węzłami 2–3 i 4–5. Mają one obecnie charakter deterministyczny, brak jest bowiem czynności alternatywnych dla nowo powstałych. Poprawiony schemat sieci uwzględniający te uwagi ilustruje rysunek 78.



Rysunek 78. Uproszczona sieć GERT po weryfikacji zależności logicznych wejść i wyjść węzłów 2–3 i 4–5

Pętlę wokół węzła 2 można zredukować, korzystając ze wzorów (68) i (69).

Kolejnym krokiem upraszczającym sieć będzie redukcja sprzężenia zwrotnego między węzłami 2–3 i 4–5. Operacji tej można dokonać, uzyskując układ zredukowany z pętlą i następnie uprościć go dalej aż do uzyskania jednego łuku zastępczego. Należy zatem zastosować wzory (71) oraz (72) i dalej (68) oraz (69). Znając te zależności, można użyć formuły (71) oraz (72) i od razu otrzymać układ zredukowany do jednej czynności.

Łuk zastępujący sprzężenie zwrotne 2–3 uzyska zatem postać:

$$p_{s3} = \frac{p_{s1} p_5}{1 - p_{s1} p_4}$$

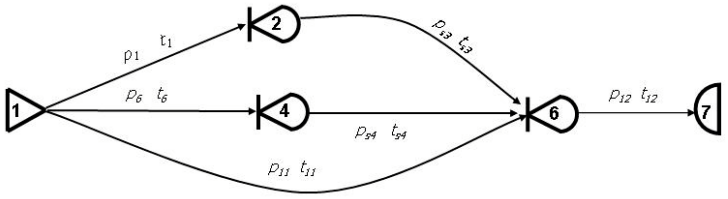
$$t_{s3} = t_{s1} + t_5 + \frac{p_{s1} p_4 (t_{s1} + t_4)}{1 - p_{s1} p_4}.$$

Natomiast łuk zastępujący sprzężenie zwrotne 4–5 przyjmie postać:

$$p_{s4} = \frac{p_{s2} p_{10}}{1 - p_{s2} p_9}$$

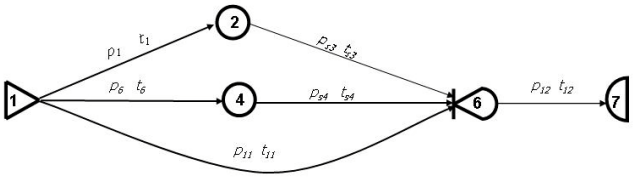
$$t_{s4} = t_{s2} + t_{10} + \frac{p_{s2} p_9 (t_{s2} + t_9)}{1 - p_{s2} p_9}.$$

Zredukowaną w ten sposób siec GERT przedstawia rysunek 79.



Rysunek 79. Kolejna redukcja sieci GERT po uproszczeniu sprzężeń zwrotnych węzłów 2–3 i 4–5

Podobnie jak po pierwszej redukcji, aby zachować poprawną strukturę logiczną sieci zmienioną po dokonanych ostatnio uproszczeniach, należy ponownie sprawdzić poprawność stochastyczną wejść i wyjść węzłów. Po uproszczeniu sprzężeń zwrotnych, a także wynikających z tego likwidacji węzłów 3 i 5 zmieni się struktura logiczna wejść oraz wyjść węzłów 2 i 4. Mają one teraz charakter deterministyczny – znajdują się bowiem na ścieżce czynności szeregowych. Poprawiony schemat sieci ilustruje rysunek 80.

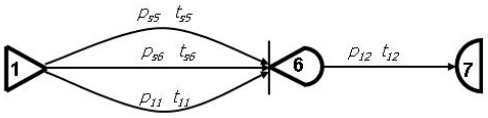


Rysunek 80. Zredukowana sieć GERT po weryfikacji zależności logicznych wejść i wyjść węzłów 2 i 4

Dalszym krokiem w upraszczaniu struktury sieciowej projektu będzie redukcja łuków szeregowych prowadząca do likwidacji węzłów 2 i 4. W tym celu można zastosować wzory (51) i (52). Parametry zredukowanego w tym kroku postępowania przyjmą postać:

$$p_{s5} = p_1 p_{s3}, \qquad p_{s6} = p_6 p_{s4},$$
$$t_{s5} = t_1 + t_{s3}, \qquad t_{s6} = t_6 + t_{s4}.$$

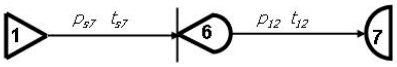
Uproszczony schemat sieci po tym zabiegu przedstawia rysunek 81.



Rysunek 81. Sieć GERT po redukcji łuków szeregowych oraz likwidacji węzłów 2 i 4

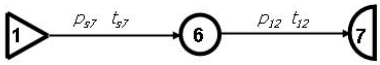
Należy oczywiście sprawdzić, czy zredukowana sieć zachowuje poprawne powiązania logiczne i logiczną strukturę sieci. W tym przypadku sieć nie wymaga dodatkowych poprawek. Możliwe jest dalsze upraszczanie tej sieci poprzez redukcję trzech powstałych równoległych łuków (1–2–6), (1–4–6), (1–6). Węzły te połączone są według typu alternatywy rozłącznej. W tym celu zostaną zastosowane formuły (6.13) i (6.14). Redukcje te przedstawia rysunek 82.

$$p_{s7} = p_{s5} + p_{s6} + p_{11}$$
$$t_{s7} = p_{s5}t_{s5} + p_{s6}t_{s6} + p_{11}t_{11}$$



Rysunek 82. Sieć przedsięwzięcia po redukcji łuków równoległych dochodzących do węzła 6

Ponieważ węzeł 6 po redukcji znajduje się w ciągu czynności szeregowych i przyjmuje postać zdarzenia deterministycznego. Sytuację tę ilustruje rysunek 83.



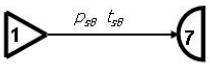
Rysunek 83. Zredukowana sieć GERT z węzłem 6 o charakterze deterministycznym

Ostatnim uproszczeniem, jakie może być przeprowadzone w tak zredukowanej sieci stochastycznej GERT, jest redukcja łuków szeregowych (1–6) i (6–7) i likwidacja węzła 6. Do obliczeń sieci po tej redukcji zostaną zastosowane wzory (50) i (51). Zredukowana do jednego łuku sieć GERT będzie charakteryzowała się następującymi obciążeniami:

$$p_{s8} = p_{s7}p_{12}$$

$$t_{s8} = t_{s7} + t_{12}.$$

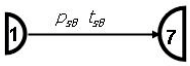
Ilustrację sieci GERT po tej redukcji przedstawia rysunek 84.



Rysunek 84. Sieć stochastyczna GERT budowy oczyszczalni ścieków zredukowana do jednego łuku

W celu uwzględnienia logiki sieci stochastycznej, zredukowaną do jednego łuku sieć można przedstawić jako jeden łuk między węzłami 1 i 7, a zatem między zdarzeniem początkowym i końcowym. Struktura logiczna takiej sieci wymaga, aby zdarzenie początkowe i końcowe miały deterministyczny typ wejścia i wyjścia.

Obrazuje to rysunek 85.



Rysunek 85. Ostateczna sieć zastępcza GERT dla przedsięwzięcia budowy oczyszczalni ścieków

Obciążenia tej sieci przedstawiają się następująco:

$$p_{s8} = p_{s7} p_{12} \qquad t_{s8} = t_{s7} + t_{12} \, .$$

W wyniku zastosowanych uproszczeń sieci wyjściowej podanej na rysunku 47, otrzymano sieć zastępczą. Ostatnim etapem jest określenie czasu i prawdopodobieństwa realizacji przedsięwzięcia opisanego siecią zastępczą na podstawie przyjętych założeń. Wartość czasu oczekiwanego i prawdopodobieństwo wyznacza się, opierając się na danych wyjściowych, wykorzystując wzory uproszczonych struktur przedsięwzięcia oraz obciążeń poszczególnych łuków.

Stosując wyjściowe obciążenia sieci GERT, jak na rysunku 75, wyznaczone zostały obciążenia łuków zastępczych p_{sn}, t_{sn} na n – tym etapie redukcji. Wyznaczone wartości końcowe p_{s8}, t_{s8} wyrażają prawdopodobieństwo i termin realizacji przedsięwzięcia.

Poniżej, w tabeli zestawiono wartości parametrów obciążenia wyjściowe prawdopodobieństwa i czasów trwania czynności w sieci oraz prawdopodobieństwa i czasy obciążeń zastępczych. Do wyznaczenia wartości obciążeń zastępczych wykorzystano przedstawione wyżej formuły.

Na podstawie przyjętych w obciążeniach wyjściowych prawdopodobieństw realizacji czynności i ich czasów trwania możemy przyjąć, że przedsięwzięcie budowy oczyszczalni ścieków będzie zrealizowane w czasie oczekiwanym, wynoszącym 11,25 tygodnia. W przypadku negatywnej oceny uzyskanego wyniku należy powrócić do rozważenia możliwości skonstruowania nowej sieci stochastycznej z innymi obciążeniami łuków poprzez inny dobór parametrów opisujących czynności. Otrzymany wynik dotyczy budowy oczyszczalni ścieków według wariantu A (największe prawdopodobieństwo realizacji). Zmieniając wartości prawdopodobieństw pozostałych wariantów, można, obliczając siec ponownie sprawdzić, czy uzyskamy bardziej interesujące nas terminy.

Tabela 18. Obciążenia wyjściowe sieci GERT i obliczenia obciążeń zastępczych

Obciążenia wyjściowe sieci GERT		Obciążenia zastępcze	
p_i	t_i	p_{sn}	t_{sn}
$p_1 = 0{,}45$	$t_2 = 8$	$p_{s1} = 0{,}25$	$t_{s1} = 2{,}5$
$p_2 = 0{,}2$	$t_2 = 2$	$p_{s2} = 1$	$t_{s2} = 3{,}2$
$p_3 = 0{,}2$	$t_3 = 2$	$p_{s3} = 0{,}21$	$t_{s3} = 1{,}39$
$p_4 = 0{,}2$	$t_4 = 4$	$p_{s4} = 1$	$t_{s4} = 7$
$p_5 = 0{,}8$	$t_5 = 1$	$p_{s5} = 0{,}09$	$t_{s5} = 3{,}89$
$p_6 = 0{,}25$	$t_6 = 2$	$p_{s6} = 0{,}25$	$t_{s6} = 9$
$p_7 = 0{,}4$	$t_7 = 2$	$p_{s7} = 1$	$t_{s7} = 3{,}5$
$p_8 = 0{,}6$	$t_8 = 4$	$p_{s8} = 1$	$t_{s8} = 11{,}25$
$p_9 = 0{,}1$	$t_9 = 3$		
$p_{10} = 0{,}9$	$t_{10} = 1$		
$p_{11} = 0{,}9$	$t_{11} = 1$		
$p_{12} = 1$	$t_{12} = 8$		

8. MINIMALNE DRZEWO ROZPINAJĄCE

Jednym z istotnych technik programowania sieciowego, o szczególnym znaczeniu w informatyce do porządkowania danych służy drzewo rozpinające grafu (*sanning tree*). Znaczenie praktyczne w technikach zarządzania ma również pojecie minimalnego drzewa rozpinającego. W tej części podręcznika zostanie zaprezentowany algorytm poszukiwania minimalnego drzewa rozpinającego grafu oraz jego praktyczna implementacja w technikach zarządzania. Podobnie, jak poszukiwanie najkrótszej drogi między dwoma dowolnie wybranymi wierzchołkami w sieci, minimalne drzewo rozpinające ma zastosowanie w zagadnieniach związanych z optymalizacja systemów transportowych oraz zagadnień logistycznych związanych z przesyłem informacji przez sieciowe systemy komputerowe.

Drzewo rozpinające w grafie, to taki zbiór wierzchołków i krawędzi grafu, że dowolne dwa wierzchołki grafu można połączyć za pomocą krawędzi należących do tego zbioru. Minimalne drzewo rozpinające, to drzewo wybrane spośród wszystkich istniejących drzew rozpinających, dla którego łączna długość krawędzi jest najmniejsza.

Inaczej ujmując drzewo rozpinające grafu, to jest drzewo, które zwiera wszystkie wierzchołki grafu, zaś zbiór krawędzi drzewa jest podzbiorem zbioru krawędzi grafu.

Jeżeli założymy, że graf zwykły definiuje dwójka $G = (V,E)$: gdzie V jest niepustym zbiorem wierzchołków grafu, a E jest zbiorem jego krawędzi, to drzewo rozpinające grafu jest definiowane przez dwójkę $G^* = (V,E^*)$; gdzie E^* jest podzbiorem utworzonym na zbiorze wszystkich krawędzi w grafie $E^* \subseteq E$.

Minimalne drzewo rozpinające *(minimal spanning tree*) tworzy się na grafach ważonych. Jak już wspomniano grafami ważonymi nazywamy grafy, w których każdej krawędzi przypisana jest pewna waga (etykieta). Jeśli dany jest graf ważony $G(V,E,w)$; gdzie w – jest funkcja przypisująca krawędzi e_i wagę (liczbę rzeczywistą).

Minimalnym drzewem rozpinającym nazywać będziemy drzewo rozpinające grafu, dla którego suma wag jest najmniejsza z możliwych:

$$G^*(V,E^*) = \sum_{e \in E^*} w_i e_i .$$

Istnieją dwa bardzo szybkie algorytmy wyznaczania minimalnego drzewa rozpinającego grafu, są to algorytm Kruskala i algorytm Prima oraz ich praktyczne połączenie, algorytm Sollina.

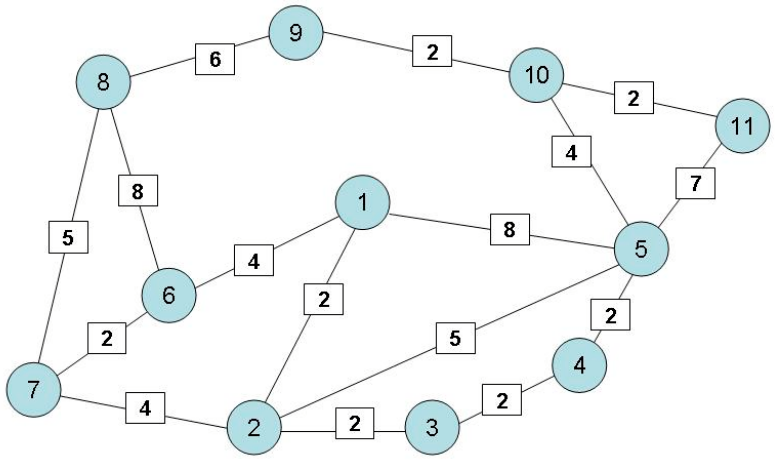
Algorytm Kruskala oparty na metodzie zachłannej (*greedy algorithms*)[15] polega na łączeniu wielu poddrzew w jedno, za pomocą krawędzi o najmniejszej wadze. W rezultacie powstałe drzewo będzie minimalne. Przed przystąpieniem do tworzenia drzewa należy posortować wszystkie krawędzie w porządku niemalejącym, a potem przystąpić do tworzenia drzewa. Proces ten nazywa się rozrastaniem lasu drzew. Wybieramy krawędzie o najmniejszej wadze i jeśli wybrana krawędź należy do dwóch różnych drzew należy je scalić (dodać do lasu) – pod warunkiem, że nie narusza definicji drzewa rozpinającego zabraniającej utworzenia cyklu. Krawędzie wybieramy tak długo, aż wszystkie wierzchołki będą należały do jednego drzewa.

Budowę minimalnego drzewa rozpinającego, według algorytmu Prima, zaczynamy od dowolnego wierzchołka grafu. Dodajemy wierzchołek do drzewa, a wszystkie krawędzie wychodzące z niego (incydentne) umieszczamy na posortowanej według wag liście. Następnie zdejmujemy z listy pierwszą krawędź (o najmniejszej wadze). Sprawdzamy, czy drugi wierzchołek tej krawędzi należy już do tworzonego drzewa. Jeżeli tak, to porzucamy krawędź (oba jej wierzchołki należą do drzewa) i pobieramy z listy krawędź następną. Jeżeli jednak wierzchołka nie ma w drzewie, to należy dodać krawędź do drzewa, by wierzchołek ten znalazł się w drzewie rozpinającym. Następnie dodajemy do posortowanej listy wszystkie krawędzie incydentne z dodanym wierzchołkiem i pobieramy z niej kolejny element. Postępujemy tak długo, aż wszystkie wierzchołki grafu znajdą się w drzewie rozpinającym.

Wymienione algorytmy nie wykazują istotnych różnic między sobą, są właściwie szablonami postępowania zmierzającego do konstrukcji minimalnego drzewa rozpinającego.

Praktyczne zastosowanie zagadnienia minimalnego drzewa rozpinającego do planowania sieci światłowodowej ilustruje przykład grafu, który wykorzystywany był już do wyznaczania minimalnej drogi w grafie. W zadaniu, które mamy rozwiązać, zlokalizowana centralnie mleczarnia postanowiła połączyć swoją centralę i wszystkie lokalne zlewnie mleka w sieć światłowodową do przesyłu drogą elektroniczną wyników pobranych próbek mleka. Informacje te są potrzebne do szybkiego ustawienia parametrów produkcji, w zależności od uzyskanych wyników. Koszty instalacji światłowodu są wysokie i dlatego dopuszcza się możliwość bezpośredniego połączenia niektórych lokalnych zlewni mleka z centralą, natomiast pozostałe zlewnie podłączą się za pośrednictwem zlewni już podłączonych. Techniczne możliwości przeprowadzenia światłowodów uwarunkowane są istniejąca siecią dróg, wzdłuż których prowadzony będzie przewód. Sieć dróg lokalnych utworzyła znany już graf (rys. 76).

[15] Idea algorytmów zachłannych (*greedy algorithms*) polega na tym że, dokonując wyboru, wybiera się zawsze rozwiązanie lokalnie optymalne, tzn. takie, które w danym momencie działania algorytmu jest najlepsze.



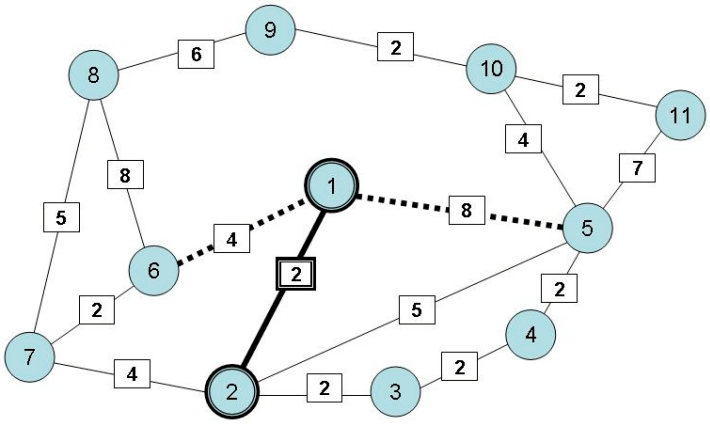
Rysunek 86. Sieć możliwych połączeń do konstrukcji drzewa rozpinającego

Algorytm wyboru minimalnej drogi oparty w swojej konstrukcji na idei algorytmów Kluskala i Prima przedstawia się następująco:

Spośród wszystkich wierzchołków grafu, którego minimalnego drzewa rozpinającego poszukujemy, wybieramy dowolny wierzchołek i łączymy go z wierzchołkiem położonym najbliżej. W skonstruowanym już drzewie mamy dwa wierzchołki i łączącą je krawędź. Wierzchołki te nazywamy wierzchołkami połączonymi, pozostałe zaś tworzą zbiór wierzchołków niepołączonych. Identyfikujemy najbliższy zbiorowi wierzchołków połączonych wierzchołek niepołączony i dołączamy go do zbioru wierzchołków połączonych wraz z krawędzią, która do tego wierzchołka prowadzi. Krok ten wykonujemy tak długo, aż do zbioru wierzchołków połączonych dołączymy wszystkie wierzchołki grafu. W każdym kroku iteracji dołączamy do powstającego drzewa również te krawędzie, które posłużyły do identyfikacji wierzchołków.

Prześledźmy przebieg kolejnych iteracji dla sformułowanego już zadania. Graf wyjściowy przedstawia rysunek 86.

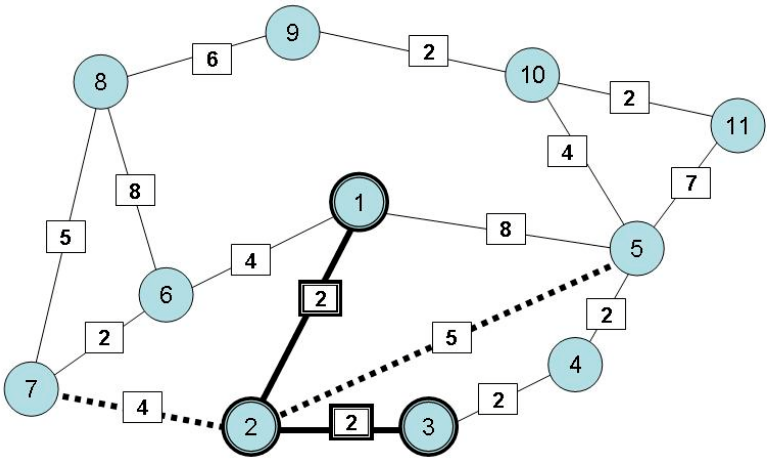
Algorytm minimalnego drzewa rozpinającego rozpoczynamy od dowolnego wierzchołka. W rozważanym przykładzie naturalnym wydaje się rozpoczęcie poszukiwań początku drzewa od wierzchołka 1. W celu zidentyfikowania następnego, najbliższego mu wierzchołka, rozpatrujemy wszystkie wychodzące z wierzchołka 1 krawędzie i wybieramy krawędź o najniższej wadze. Ilustruje to rysunek 87.



Rysunek 87. Graf minimalnego drzewa rozpinającego po pierwszej iteracji

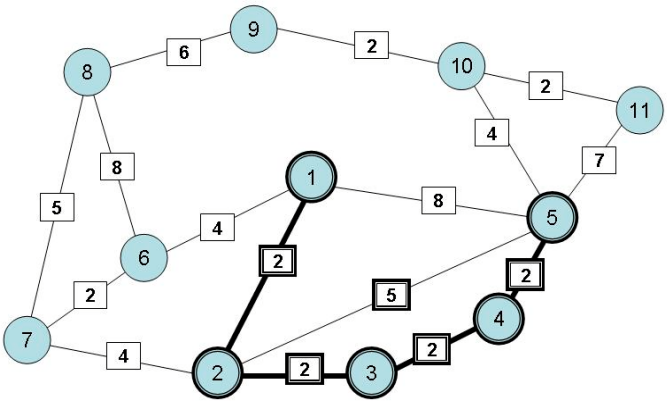
Z wierzchołka 1 biorą początek trzy krawędzie (1–2), (1–5) i (1–6). Wagi tych wierzchołków wynoszą odpowiednio 2, 8, i 6. Wybieramy krawędź o najniższej wadze czyli krawędź (1–2). Wierzchołek 2 nie należy jeszcze do zbioru wierzchołków połączonych, więc dołączamy go do zbioru, a pierwszą krawędzią poszukiwanego drzewa będzie krawędź (1–2).

Ze zbioru wierzchołków niepołączonych, najbliższy tworzonemu drzewu jest wierzchołek 2 bowiem, ze zbioru krawędzi (2–3), (2–5) i (2–7) krawędź (2–3) na najniższą wagę. Zatem wierzchołek 3 włączamy do zbioru wierzchołków połączonych oraz krawędź (2–3) dopinamy do istniejącego drzewa. Ilustracją tego kroku jest rysunek 88.



Rysunek 88. Graf minimalnego drzewa rozpinającego po drugiej iteracji

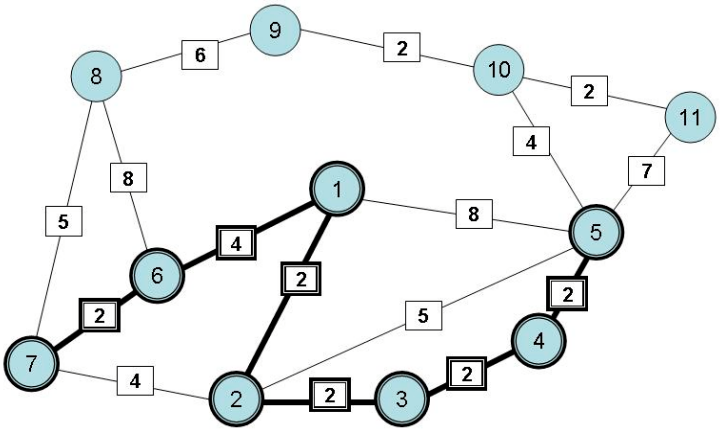
W następnych iteracjach dołączamy do zbioru wierzchołków połączonych wierzchołki 3, 4, i 5 oraz łączące je krawędzie. Otrzymaną w wyniku tych kroków sytuację ilustruje rysunek 89.



Rysunek 89. Graf minimalnego drzewa rozpinającego po dołączeniu wierzchołków 4 i 5

Ze zbioru wierzchołków niepołączonych 6, 7, 10, i 11 najbliższe utworzonego już drzewa są wierzchołki 6, 7 oraz 10. Krawędzie, które łączą te wierzchołki z wierzchołkami połączonymi mają równe wagi, arbitralnie zatem wybieramy wierzchołek 6 (wierzchołek o najniższym numerze. Dołączamy go do grafu wraz z krawędzią (1–6).

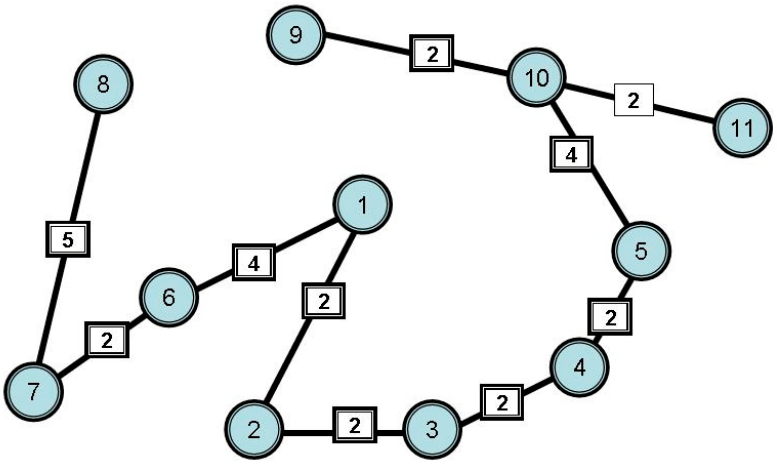
Następnym dołączonym wierzchołkiem jest wierzchołek 7, który wraz z krawędzią (6–7) tworzą drzewo przedstawione na rysunku 90.



Rysunek 90. Graf minimalnego drzewa rozpinającego z dołączonymi wierzchołkami 6 i 7

Zbiór wierzchołków niepołączonych stanowią wierzchołki 8, 9, 10 i 11. Najbliżej zbioru wierzchołków połączonych jest wierzchołek 10, ponieważ łącząca ten wierzchołek z uzyskanym już drzewem krawędź (5–10) ma najniższą wagę spośród krawędzi pozostałych. Zatem wierzchołek 10 i krawędź (5–10) dołączamy do poszukiwanego drzewa. Następnie dołączane do zbioru wierzchołków połączonych będą wierzchołki 9 i 11 oraz krawędzie, które je z drzewem spinają. Ostatnim dołączonym wierzchołkiem jest wierzchołek 8 oraz krawędź (7–8), jako krawędź o niższej wadze niż krawędź (9–8).

Uzyskane w wyniku postępowania iteracyjnego minimalne drzewo rozpinające dla grafu początkowego przedstawia rysunek 91.

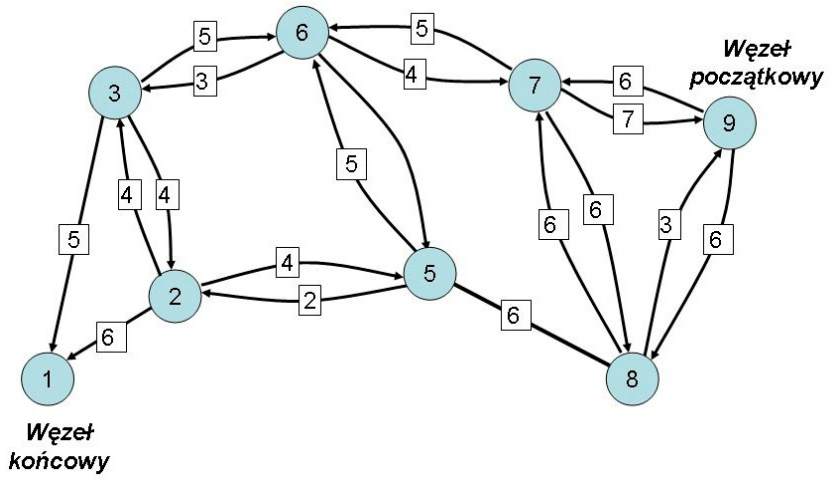


Rysunek 91. Minimalne drzewo rozpinające grafu prezentującego możliwą sieć połączeń

9. ZAGADNIENIE NAJKRÓTSZEJ DROGI W GRAFIE

Zagadnienie najkrótszej drogi w grafie jest jednym z najprostszych, lecz bardzo ważnych zagadnień dotyczących problemów optymalizacyjnych na sieciach. Problem ten można opisać w następujący sposób: w sieci, której każdy łuk ma określoną długość, należy znaleźć najkrótszą drogę między dwoma dowolnymi węzłami.

Rozważmy sieć utworzoną z analizy maksymalnego przepływu w sieciach (rozdz. 6, 2, 3). Przeprowadzona analiza wykazała, że maksymalny przepływ przez sieć przedstawioną na rysunku 59 można uzyskać, wykorzystując cztery ścieżki pełne. Węzeł 4 i drogi przechodzące przez niego nie biorą udziału w planie wyznaczania maksymalnego przepływu. Jeśli zatem z tego grafu wyeliminujemy węzeł 4 i wszystkie z nim związane drogi oraz krawędź 3–5, która również nie jest wykorzystywana do maksymalnego przepływu, uzyskamy graf, który posłuży nam do poszukiwania najkrótszej drogi w sieci (rys. 92).



Rysunek 92. Model poszukiwania najkrótszej drogi w sieci

Rozważmy zatem sieć utworzoną ze zbioru węzłów, których niektóre pary (w naszym przypadku większość) są połączone łukami zorientowanymi. Węzeł 1 i węzeł 9 są wyróżnione jako węzły początku i końca sieci. Problem polegać będzie na znalezieniu najkrótszej drogi do węzła końcowego od co najmniej jednego z pozostałych węzłów lub też od wszystkich pozostałych węzłów.

Wielkość c_{ij}, w tym przypadku, oznacza długość drogi, która zaczyna się w węźle *i* a kończy się w węźle *j*.

W zastosowaniach tego modelu wielkość c_{ij} może być wyrażona w innych jednostkach niż jednostki odległości. Na przykład, wartość c_{ij} może oznaczać koszt przebycia drogi od węzła *i* do węzła *j* i wtedy problem polega na znalezieniu najtańszej drogi. W innych sytuacjach wartość c_{ij} może reprezentować czas potrzebny na przebycie drogi między tymi węzłami i wtedy problem polega na znalezieniu najszybszej drogi.

W tych zastosowaniach często $c_{ij} \neq c_{ji}$. Ponadto między niektórymi węzłami może nie być połączenia bezpośredniego. Taki przypadek oznaczamy, przyjmując $c_{ij} = \infty$. W niektórych przypadkach zachodzi tzw. nierówność trójkąta $c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}$ i nie jest ona spełniona dla wszystkich możliwych wartości *i*, *j* oraz *k*.

Sieć tak, jak analizowana może zawierać drogi będące cyklami. Oznacza to, że dla dwóch lub więcej węzłów możliwe jest znalezienie takiej łączącej je drogi, że początek drogi schodzi się w tym samym węźle z końcem drogi. Na rysunku 92 występuje wiele cykli, np. droga prowadząca od węzła 6 przez węzły 3, 2 i 5 z powrotem do węzła 6.

Rozważmy zatem problem polegający na znalezieniu optymalnej drogi prowadzącej do węzła końcowego od ustalonego węzła początkowego. W rozpatrywanym przypadku ustalono, że węzeł początkowy jest węzłem 9, a węzeł końcowy to węzeł nr 1. Ta nienaturalna zmiana kolejności wejścia i wyjścia wynika z przyjęcia modelu najkrótszej drogi w grafie jako modelu równoważnym zagadnieniom przydziału[16]. Na tej podstawie została skonstruowana tablica przydziału z zapasem buforowym B = 1 (tab. 15). Zagadnienie najkrótszej drogi jest więc szczególnym przypadkiem problemu przydziału, w którym współczynniki funkcji celu $c_{kk} = 0$ występują poniżej głównej przekątnej tablicy.

Tabela 19. Tablica zagadnienia najkrótszej drogi

Od węzła (węzeł początkowy) \ Do węzła	9	8	7	6	5	3	2	1	węzeł końcowy
9	0	$c_{9,8}$	$c_{9,7}$						1
8	$c_{8,9}$	0	$c_{8,7}$		$c_{8,5}$				1
7	$c_{7,9}$		0	$c_{7,6}$					1
6			$c_{6,7}$	0	$c_{6,5}$	$c_{6,3}$			1
5				$c_{5,6}$	0		$c_{5,2}$		1
3				$c_{3,6}$		0	$c_{3,2}$	$c_{3,1}$	1
2					$c_{2,5}$	$c_{2,3}$	0	$c_{2,1}$	1
1								0	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	

[16] Rozważany model minimalnej drogi może być rozpatrywany jako klasyczne wieloetapowe zagadnienie transportowe, w którym jednostka towaru oferowana jest przez węzeł 9 (nadawcę początkowego), a zamówiona przez węzeł 1 (odbiorcą końcowego). Wszystkie pozostałe węzły traktowane są jako punkty pośrednie (H.M. Wagner, *Badania operacyjne*. PWE Warszawa 1980.

Matematyczny model zagadnienia najkrótszej drogi jest następujący:

$$FC = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \tag{73}$$

przy warunkach ograniczających :

$$\sum_{\substack{k,j \\ w\ sieci}} x_{kj} - \sum_{\substack{i,k \\ w\ sieci}} x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{dla k=p (punkt początkowy sieci)} \\ 0, & \text{dla wszystkich pozostałych k} \\ -1, & \text{dla k=r (punkt końcowy sieci)} \end{cases} \tag{74}$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ dla wszystkich (i,j) w sieci} \tag{75}$$

W tablicy współczynników warunków ograniczających modelu (1) – (3) każdemu węzłowi odpowiada jeden wiersz, a każdemu łukowi – jedna zmienna. Dla przykładu, jeśli przyjmiemy k = p = 9, to z warunku ograniczających mamy:

$$x_{97} + x_{98} - x_{79} - x_{89} = 1 \quad \rightarrow \text{ węzeł początkowy 9}$$

natomiast, jeśli przyjmiemy k = 5, to otrzymamy:

$$x_{65} + x_{52} - x_{56} - x_{25} = 0 \quad \rightarrow \text{ węzeł pośredni 7.}$$

Rozwiązywanie takiego modelu jest jednak bardzo pracochłonne. W pewnych określonych przypadkach uproszczeniem rozwiązań programowania liniowego może być zapisanie do niego funkcji dualnej i rozwiązywanie mniej skomplikowanego układu równań z maksymalizowaną funkcją celu.

Ogólnie, jeśli problem wyznaczania w sieci najkrótszej z drogi miedzy węzłem początkowym p a węzłem końcowym *r* sprowadzimy do zagadnienia programowania liniowego, a głównie do jego postaci dualnej:

Założymy, że dana sieć zawiera szereg dróg od węzła początkowego (*p*) do węzła końcowego (*r*), a naszym zadaniem jest wybrać najkrótszą z nich. W naszym przypadku węzeł początkowy, to węzeł 9, a węzeł końcowy, to węzeł 1. Sprowadzony do zadania dualnego problem programowania liniowego przedstawiony jest w formie tablicy technologicznej (tab. 20).

Niech zatem y_k będzie zmienną dualna związaną z węzłem *k*. Problem dualny do zagadnienia programowania liniowego określonego tablicą technologiczną (tab. 20), w ogólnej postaci jest następujący:

$$FC^* = -y_r + y_p \rightarrow max \tag{76}$$

przy warunkach ograniczających:

$$y_i - y_j \leq c_{ij} \quad \text{– dla wszystkich łuków } (i,j) \text{ w sieci} \tag{77}$$

gdzie każda zmienna y_k może przyjmować wartości o dowolnym znaku.

Tabela 20. Tablica technologicznego zagadnienia najkrótszej drogi w grafie

	wielkości przewozów																	
	x_{98}	x_{97}	x_{89}	x_{87}	x_{85}	x_{78}	x_{76}	x_{67}	x_{65}	x_{63}	x_{56}	x_{52}	x_{36}	x_{32}	x_{31}	x_{23}	x_{21}	
węzły 9	1	1	–1															=1
8	–1		1	1	1	–1												=0
7		–1		–1		1	1	–1										=0
6							–1	1	1	1	–1		–1					=0
5					–1				–1		1	1						=0
3										–1			1	1	1	–1		=0
2												–2		–1		1	1	=0
1															–1		–1	= –1
	c_{98}	c_{97}	c_{89}	c_{87}	c_{85}	c_{78}	c_{76}	c_{67}	c_{65}	c_{63}	c_{56}	c_{52}	c_{36}	c_{32}	c_{31}	c_{23}	c_{21}	

Rozpatrując analizowany przez nas problem najkrótszej drogi w grafie danym na rysunku 92, możemy zapisać:

zmaksymalizować $-y_1 + y_p$

przy warunkach ograniczających:

$$
\begin{array}{lll}
y_9 - y_8 \le c_{98} & y_9 - y_7 \le c_{97} & y_8 - y_9 \le c_{89} \\
y_8 - y_7 \le c_{87} & y_8 - y_5 \le c_{85} & y_7 - y_9 \le c_{70} \\
y_7 - y_8 \le c_{78} & y_7 - y_6 \le c_{76} & y_6 - y_7 \le c_{67} \\
y_6 - y_5 \le c_{65} & y_6 - y_5 \le c_{65} & y_6 - y_3 \le c_{63} \\
y_5 - y_6 \le c_{56} & y_5 - y_2 \le c_{52} & y_3 - y_6 \le c_{36} \\
y_3 - y_2 \le c_{32} & y_3 - y_1 \le c_{31} & y_2 - y_3 \le c_{23} \\
y_2 - y_1 \le c_{21} & &
\end{array}
$$

każda zmienna y_k może przyjmować wartości o dowolnym znaku.

Rozwiązanie powyższego problemu dualnego uzyskano, korzystając z programu komputerowego. Wartość funkcji celu wynosi $FC = 19$ przy wartościach poszczególnych zmiennych dualnych y_k wynoszących:

$y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 5$, $y_5 = 10$, $y_6 = 8$, $y_7 = 13$, $y_8 = 13$, $y_9 = 19$.

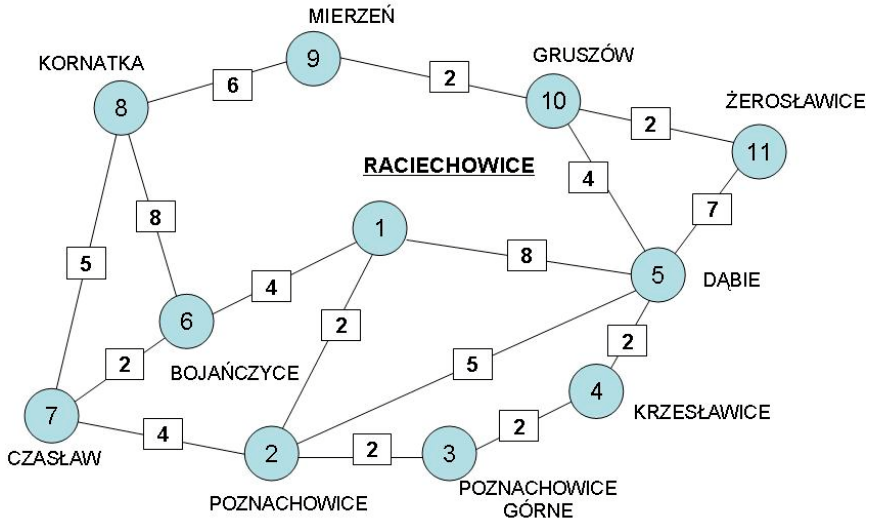
Dowód powyższych modeli i sposób rozwiązania zagadnienia minimalnej drogi w sieci z wykorzystaniem programowania liniowego, zarówno metodą dualną, jak i prymarną można znaleźć u H.M. Wagnera [1980].

Przedstawiona wyżej metoda wyznaczenia najkrótszej drogi w grafie dotyczyła sieci, które mogą zawierać cykle i pętle. Interesujący sposób poszukiwania minimalnej drogi w grafie acyklicznym zaprezentował T. Trzaskalik [2003]. W tym celu, na podstawie schematycznej mapy gminy (rys. 57), sprządźmy jeszcze raz graf acykliczny (niezawierający cykli oraz pętli) odwzorowujący istniejącą w gminie sieć drogową. Sformułujmy zatem zadanie wyznaczenia najkrótszej drogi w grafie następująco:

W centrum gminy w miejscowości Raciechowice zlokalizowany został zakład przetwórczy produktów mlecznych, zaopatrujący się w mleko od produ-

centów z terenu całej gminy. Producenci mleka dostarczają mleko zorganizowanym transportem do lokalnych zlewni mleka położonych w każdej miejscowości. Ze względu na konieczność codziennego odbioru mleka z lokalnych zlewni istotne staje się zminimalizowane kosztów transportu. Temu celowi służy określenie najkrótszych połączeń komunikacyjnych między zakładem mleczarskim położonym centralnie w gminie i na grafie reprezentowanym przez wierzchołek 1 oraz lokalnymi zlewniami mleka umieszczonymi w poszczególnych miejscowościach symbolizowanych wierzchołkami 2–11. Wartość parametru opisującego każdą z krawędzi to długość drogi między węzłami grafu, które łączy daną krawędź (łuk). Należy znaleźć najkrótsze drogi prowadzące z zakładu mleczarskiego do kolejnych zlewni mleka.

Na rysunku 93 przedstawiono w formie grafu acyklicznego istniejącą sieć dróg reprezentującą krawędzie grafu a poszczególnymi miejscowościami, w których znajdują się zlewnie mleka reprezentowane przez łuki.



Rysunek 93. Graf acykliczny istniejącej sieci komunikacyjnej

Na podstawie powyższego przykładu zostanie przedstawiony algorytm poszukiwania najkrótszych dróg w grafie zaproponowany przez T. Trzaskalika [2003].

Algorytm ten składa się z dwóch faz. W fazie pierwszej następuje cechowanie węzłów przez nadanie im specjalnych etykiet; stałych lub tymczasowych. Etykiety te nadaje się według specjalnej procedury, pamiętając o tym, że każda z etykiet ma dwie składowe. Pierwsza z nich podaje długość najkrótszej, znalezionej dotąd drogi do danego węzła, druga składowa to numer węzła stanowią-

cego początek ostatniego łuku należącego do tej najkrótszej drogi. W kolejnych iteracjach etykiety tymczasowe mogą być zmieniane. Dzieje się tak wówczas, gdy znajdziemy drogę krótszą od drogi znalezionej dotychczas. Jeżeli mamy pewność, że do danego węzła nie istnieje krótsza droga, to przyporządkowujemy mu etykietę stałą. Po cechowaniu na stałe wszystkich węzłów w grafie przechodzimy do realizacji drugiej fazy algorytmu, w której na podstawie drugich składowych etykiet odtwarzamy przebieg najkrótszych dróg od węzła początkowego do wszystkich pozostałych węzłów.

Pierwsza faza algorytmu jest fazą iteracyjną, której każdy krok zbliża nas do rozwiązania końcowego. W iteracji pierwszej węzłem cechowanym na stałe jest węzeł, któremu przyporządkowana zostaje etykieta stała [*0,P*] (pierwsza składowa etykiety podaje odległość od węzła poprzedzającego – czyli odległość od niego samego – równą: 0; litera P występująca jako druga składowa wskazuje, że jest to węzeł początkowy). Identyfikujemy wszystkie łuki wychodzące z węzła 1, a węzłom kończącym te łuki przypisujemy etykiety tymczasowe.

W iteracji kolejnej i następnych wybieramy spośród węzłów już ocechowanych węzeł, który ma być ocechowany na stałe. Jest to węzeł, który ma najmniejszą pierwszą składową swojej etykiety tymczasowej. Następnie identyfikujemy wszystkie łuki wychodzące z tego węzła do węzłów, które nie zostały jeszcze ocechowane na stałe. Dla każdego z nich sprawdzamy, czy droga dochodząca z rozpatrywanego węzła jest krótsza od wyznaczonej do tej pory. Jeśli tak jest, to zmieniamy etykietę tymczasową zgodnie z podanymi zasadami, w przeciwnym wypadku pozostawiamy etykietę tymczasową bez zmian. Postępowanie to powtarzamy aż do wyczerpania wszystkich możliwości (wszystkie węzły zostały oznaczone stałymi etykietami).

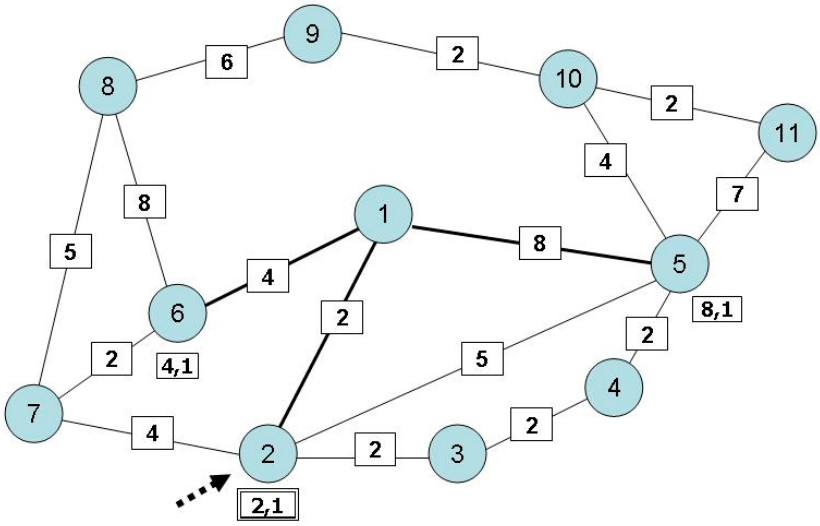
W drugiej fazie algorytmu, w której identyfikujemy łuki wchodzące w skład najkrótszych dróg w grafie, rozpoczynając identyfikację od węzła 2. Do tego celu służy druga składowa etykiety stałej. Identyfikujemy kolejne łuki poszukiwanej drogi tak długo, aż osiągnięty zostanie węzeł początkowy.

Poniżej prześledzimy przebieg kolejnych iteracji dla zadania sformułowanego w przykładzie.

W **iteracji pierwszej** identyfikujemy łuki wychodzące z węzła początkowego 1, któremu nadano etykietę stałą. Łukami tymi są: 1–2, 1–5 i 1–6. Odległości od węzła początkowego są równe parametrom przypisanym tym łukom. Ponieważ węzłem poprzedzającymi każdy z tych węzłów jest węzeł 1, otrzymujemy następujące etykiety:

dla węzła	2	–	etykieta stała	(2,1)
dla węzła	5	–	etykieta tymczasowa	(4,1)
dla węzła	6	–	etykieta tymczasowa	(8,1)

Wybór węzła cechowanego na stałe po pierwszej iteracji przedstawia rysunek 94.



Rysunek 94. Graf po pierwszej iteracji – węzeł 2 cechowany etykieta stałą

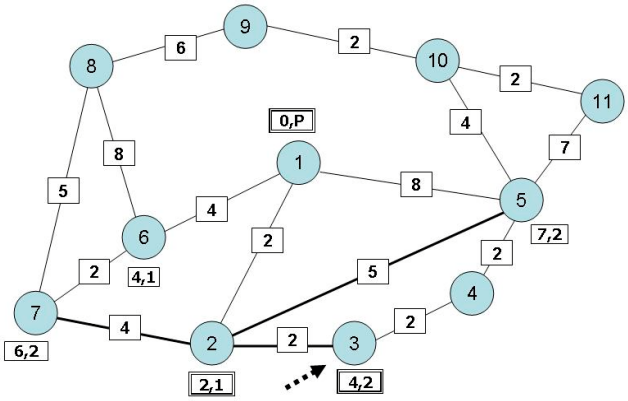
W **iteracji drugiej** – przeglądając składowe etykiet tymczasowych, stwierdzamy, że węzłem cechowanym na stałe będzie węzeł 2 (wartość pierwszej składowej dla tego węzła jest najmniejsza).

Z węzła 2 prowadzą dwie krawędzie: 2–3 i 2–7. Węzły te nie były dotychczas cechowane więc przypisujemy im tymczasowe etykiety, w których pierwsze składowe są równe sumie najkrótszej drogi do węzła 2 (wynoszącej 2) i długości łuków 2–3 i 2–7. Etykiety dla wymienionych węzłów przedstawiają się następująco:

dla węzła	3	–	etykieta stała	(4,2)
dla węzła	7	–	etykieta tymczasowa	(6,2)

Z dwóch, do tej pory nie ocechowanych, etykietą stałą węzłów najmniejszą wartość pierwszej składowej ma węzeł 3 i jemu została przypisana etykieta stała.

Graf po tym kroku przedstawiono na rysunku 95.



Rysunek 95. Graf po drugiej iteracji – ocechowany węzeł 3 etykieta stałą

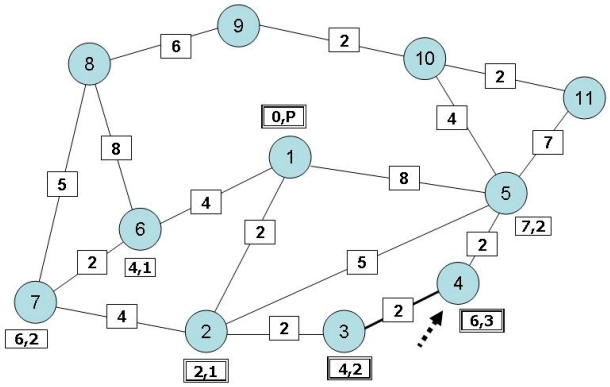
W następnej, **trzeciej iteracji** z ocechowanego stałą etykietą węzła 3 wyróżniamy wychodzący z niego jeden łuk, który ma zakończenie w węźle 4. Przypisujemy zatem temu węzłowi etykietą tymczasową:

dla węzła 4 – etykieta (6,3).

Taką samą wartość pierwszej składowej ma węzeł 7. Jak wspomniano wcześniej, w przypadku niejednoznaczności etykietę stałą przypisujemy węzłowi o numerze mniejszym, zatem węzeł 4 otrzymuje etykietę stałą.

dla węzła 4 – etykieta stała (6,3).

Postać grafu po trzeciej iteracji przedstawia rysunek 96.



Rysunek 96. Postać grafu po trzeciej iteracji – węzeł 4 ocechowany etykietą stałą

W **czwartej iteracji** dokonujemy analizy pierwszych składowych etykiet tymczasowych nie ocechowanych na stałe:

węzeł 5 – etykieta tymczasowa (8,1)
węzeł 6 – etykieta tymczasowa (4,1)
węzeł 7 – etykieta tymczasowa (6,2)

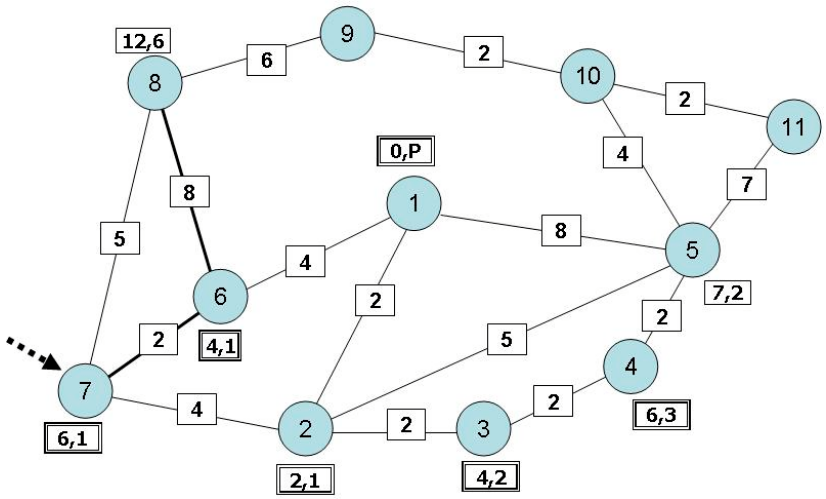
Ponieważ pierwsza składowa węzła 6 jest mniejsza, zatem ten węzeł zostaje ocechowany etykieta stałą:

węzeł 6 – etykieta stała (4,1)

Z węzła tego wychodzą dwa łuki, których zakończeniem są węzły 7 i 8. Węzeł 8 nie ma jeszcze żadnej etykiety, więc przypisujemy mu etykietę (12,6). Węzeł 7 natomiast ma już przypisaną etykietę tymczasową (6,2), nowa etykieta miałaby swoją pierwszą składową identyczną, zatem pozostawiamy tę etykietę, przypisując jej charakter stały:

węzeł 8 – etykieta tymczasowa. (11,7)
węzeł 7 – etykieta stała (6,2)

Graf po tej iteracji ma postać daną na rysunku 97.



Rysunek 97. Postać grafu po czwartej iteracji – ocechowane etykietami stałymi węzły 6 i 7

W **iteracji piątej** przypisujemy nową etykietę węzłowi 8 ocechowanemu etykietą tymczasową (12,6). Nowa etykieta ma następujące składowe (11,7) – przypisujemy ją zatem węzłowi 8, jako lepszą od poprzedniej.

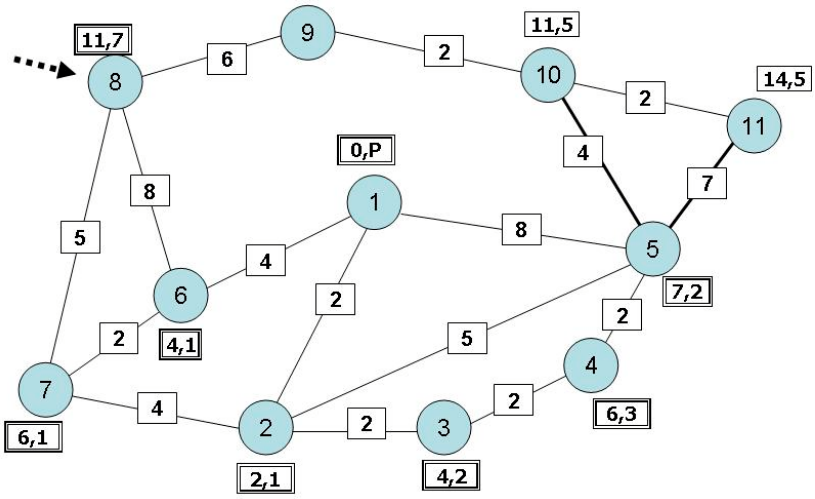
Z dwóch oznaczonych etykietami tymczasowymi węzłów 5 i 8 niższą wartość pierwszej składowej ma węzeł 5, zatem ten węzeł zostaje ocechowany etykietą stałą:

węzeł	8	–	etykieta tymczasowa.	(11,7)
węzeł	5	–	etykieta stała	(7,2)

Iteracja szósta kontynuuje analizę grafu w węźle 5. Z węzła tego wychodzą dwa łuki o zakończeniu w węźle 10 i 11. Węzły te nie są jeszcze węzłami cechowanymi więc przypisujemy im etykiety:

węzeł	10	–	etykieta tymczasowa.	(11,7)
węzeł	11	–	etykieta tymczasowa	(7,2)

Z trzech ocechowanych etykietami tymczasowymi wierzchołków 8, 10, i 11 dwa z nich mają najmniejsze pierwsze składowe, a z tych dwóch etykietę stałą przypiszemy węzłowi 8, jako węzłowi o niższym numerze w grafie. Otrzymaną sytuację przedstawia rysunek 98.

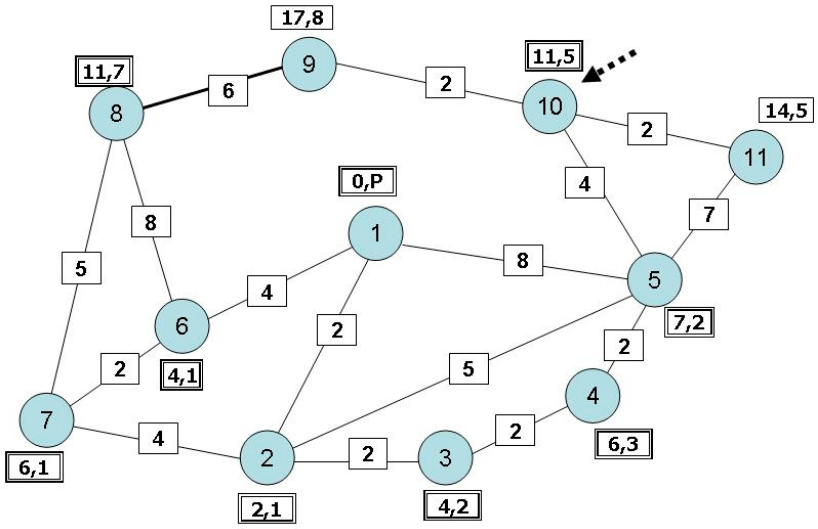


Rysunek 98. Graf po szóstej iteracji – na stałe ocechowany węzeł 8

W **iteracji siódmej** przypisujemy tymczasową etykietę węzłowi 9 jako kończącemu łuk 8–9. Etykieta tymczasowa dla tego węzła wyniesie (17,8).

Otrzymujemy trzy węzły ocechowane etykietami tymczasowymi (9, 10, i 11). Najniższą wartość pierwszej składowej ma węzeł 10 i jemu przyznajemy etykietę stałą.

Sytuację tę obrazuje rysunek 99.



Rysunek 99. Graf po siódmej iteracji – etykietą stałą został ocechowany węzeł 10

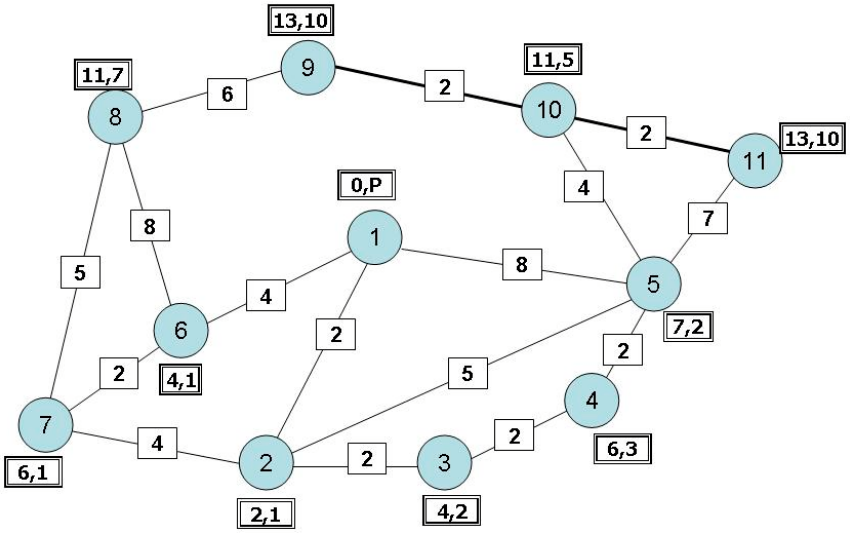
Iteracja ósma rozstrzyga problem najkrótszych dróg w grafie, przypisując stałe etykiety węzłom następująco:

węzeł 9 – etykieta stała (13,10)
węzeł 11 – etykieta stała (13,10)

Graf po zakończeniu pierwszej fazy algorytmu poszukiwania najkrótszych dróg przedstawia się następująco (rys. 100).

Ponieważ wszystkie wierzchołki zostały ocechowane na stałe, pierwsza faza algorytmu została zakończona. Druga faza polega na identyfikacji dróg. Proces identyfikacji najkrótszych dróg przedstawiony zostanie na jednym z możliwych węzłów. Przedstawiona zostanie przykładowo konstrukcja drogi dla węzła 10. Duga składowa tego węzła wynosi 5, wskazuje to, że ostatni odcinek konstruowanej drogi od wierzchołka 1 do wierzchołka 10 rozpoczyna się w węźle 5. Ostatni odcinek tej drogi to łuk 5–10.

Z kolei najkrótsza droga do węzła 5 prowadzi z węzła 2 (druga składowa etykiety stałej węzła 5). Etykieta stała węzła 2 (druga składowa) wskazuje, że najkrótsza droga do tego węzła prowadzi od węzła 1.



Rysunek 100. Graf po pierwszej fazie algorytmu poszukiwania najkrótszych dróg

Najkrótsza, zatem droga od początku sieci (węzeł 1) do węzła 10 prowadzi przez węzły 2 i 5.

Pozostałe najkrótsze drogi w grafie przedstawione zostały w tabeli 21.

Tabela 21. Zestawienie najkrótszych dróg w grafie

Węzeł	Najkrótsze drogi	Odległości
2	1–2	2
3	1–2–3	4
4	1–2–3–4	6
5	1–2–5	7
6	1–6	4
7	1–2–7	6
8	1–2–7–8	11
9	1–2–5–10–9	13
10	1–2–5–10	11
11	1–2–5–19–11	13

10. DRZEWA DECYZYJNE

Podejmowanie jakichkolwiek decyzji związane jest z pewnymi konsekwencjami w przyszłości. Ponieważ zazwyczaj nie znamy przyszłości, wybór trafnej decyzji, to znaczy tej, która przyniesie nam możliwie najlepsze efekty, jest trudne. Podejmowanie decyzji ma oczywiście znaczenie zarówno w zarządzaniu przedsiębiorstwami, jak i w życiu codziennym. Sam proces podejmowania decyzji powinien być poprzedzony zebraniem dostępnych informacji, na podstawie których wybierzemy jedną optymalną z dostępnych możliwości.

Przedstawione wcześniej metody wspomagania decyzji, z wykorzystaniem programowania sieciowego, stanowią zespół klasycznych technik wykorzystywanych w podejmowaniu optymalnych decyzji. Prezentowane metody oparte na grafach i sieciach stanowią istotną cześć badań operacyjnych (*operations research*). Algorytmy i sposoby poszukiwania optymalnych parametrów decyzyjnych, jak wykazano wcześniej, w większości przypadków mogą być sprowadzone do klasycznych postaci zagadnień programowania liniowego (PL) i być rozwiązywane z wykorzystaniem odpowiednich dla PL metod. Jednakże przedstawione algorytmy rozwiązywania problemów decyzyjnych z wykorzystaniem sieci i grafów są bardziej efektywne, a przez to w praktyce stosowane niemal wyłącznie.

W tej części podręcznika zostaną zaprezentowane metody, nie zaliczane do klasyki badań operacyjnych, a wspomagające takie procesy decyzyjne, których struktura problemu decyzyjnego pozwala na ich graficzną prezentację. Identyfikacje problemu i schemat decyzyjny jest przedstawiany w formie grafu. Grafami w tych przypadkach są drzewa decyzyjne i drzewa produktu.

Drzewa decyzyjne konstruuje się w przypadku etapowego podejmowania decyzji, w celu graficznego zapisu analizy procesu podejmowania decyzji. Struktura problemu decyzyjnego pozwala na wydzielanie pewnych etapów podejmowania decyzji. Zbiór możliwych decyzji podejmowanych na określonym etapie procesu decyzyjnego jest konfrontowany ze zbiorem stanów warunkujących uzyskanie określonych korzyści wynikających z podjętej decyzji i stanu, w jakim zachodzi jej realizacja. Drzewa decyzyjne znalazły szerokie zastosowanie w teorii decyzji (*decision-making theory*) i w eksploracji danych (*data mining*), a także w informatyce, w organizacji baz danych.

Drzewa produktu zaś stanowią graficzne prezentacje przebiegów etapowego procesu produkcji, w którym na każdym etapie zgłoszone jest określone zapotrzebowanie na surowce, półprodukty i gotowe wyroby. Technika budowy drzewa produktu, wraz z prognozą zapotrzebowania na wyrób finalny, pozwala na planowanie zużycia materiałów w procesie produkcji.

10.1. STRUKTURA PROCESU DECYZYJNEGO W WARUNKACH NIEPEŁNEJ INFORMACJI

Szczegółowemu omówieniu procesów decyzyjnych poświecono wiele uwagi w literaturze specjalistycznej z zakresu teorii podejmowania decyzji. Założenia tego podręcznika koncentrują uwagę głównie na sposobach wykorzystania grafów i sieci w procesie podejmowania decyzji. Zatem elementy procesu decyzyjnego omówimy tylko w takim zakresie, jaki jest konieczny do zrozumienia idei zastosowania drzew decyzyjnych jako graficznych ilustracji złożoności procesów decyzyjnych podejmowanych w warunkach niepełnej informacji.

Logiczna typologia decyzji grupuje je na podstawie stopnia wiedzy decydenta o przyszłych zdarzeniach, wpływających na wyniki możliwych kierunków działania, rozróżniając:

- decyzje podejmowane w warunkach pewności,
- decyzje podejmowane w warunkach ryzyka,
- decyzje podejmowane w warunkach niepewności.

Pierwsza grupa decyzji podejmowanych w warunkach deterministycznych (z wyjątkiem metody GETR) była przedmiotem rozważań przedstawianych w poprzednich rozdziałach. Pozostałe dwie grupy stanowią decyzje podejmowane w warunkach braku pełnej wiedzy o przyszłości.

Podejmowanie decyzji w warunkach braku wiedzy o przyszłości wymaga dokonania określonej strukturalizacji problemu decyzyjnego, a mianowicie sprowadzenia rzeczywistego problemu decyzyjnego do postaci umożliwiającej zastosowanie określonych technik i metod decyzyjnych oraz kryteriów decyzyjnych. Strukturalność ta, w gruncie rzeczy właściwa dla każdego problemu decyzyjnego, składa się z pięciu podstawowych elementów problemu decyzyjnego. Są to:

- podmiot podejmujący decyzje,
- zbiór kierunków działania,
- zbiór stanów świata zewnętrznego,
- funkcja korzyści,
- ryzyko lub niepewność co do stanu świata zewnętrznego.

Podmiotem podejmującym decyzję może być osoba lub grupa osób (w konkretnym przypadku organ jednoosobowy lub organ kolegialny). W praktyce jednak tylko nieliczne decyzje zostają podjęte przez jedną osobę, z całkowitym pominięciem poglądów innych osób. Nawet jeżeli formalne procedury decyzyjne przyznają prawo podjęcia decyzji tylko jednej osobie, to na ogół poszukuje ona opinii, a więc udziału w procesie decydowania, innych osób. Podmiot podejmujący decyzję formułuje cele organizacji, analizuje zgromadzone informacje, wypracowuje i ocenia dostępne kierunki działania, przyjmuje kryterium (kryteria) decyzyjne itd., jest on więc najważniejszym elementem w strukturze problemu decyzyjnego.

Zbiór kierunków działania zgodnie z przyjętym rozumieniem decydowania musi się składać z co najmniej dwu wykonalnych kierunków działania. Jeżeli istnieje tylko jeden kierunek, to nie ma możliwości dokonania wyboru, a więc nie ma możliwości podjęcia decyzji. W skrajnym przypadku może to być zbiór o nieskończonej liczbie kierunków działania, pomiędzy którymi wybieramy. Najprostszy przypadek decydowania z rozważanego punktu widzenia to sytuacja, gdy wybieramy pomiędzy akceptacją pewnego kierunku działania lub jego odrzuceniem (decyzja na *tak* lub na *nie*). Decyzja na *nie* teoretycznie oznacza świadome odrzucenie kierunku sugerowanego przez decyzję na *tak* i jest oparta w idealnym przypadku na takiej samej ilości informacji, jakiej wymaga decyzja na *tak*. Inną, ważną cechą rozpatrywanego elementu struktury problemu decyzyjnego jest sama znajomość możliwych kierunków działania. Może być tak, że od początku dokładnie wiadomo, jakie kierunki działania wchodzą w grę, a więc zbiór kierunków działania jest zamknięty. Może jednak być tak, że kierunki działania muszą być specjalnie wypracowane dla danego problemu decyzyjnego w zależności od skuteczności lub nieskuteczności decyzji podjętej wcześniej. Wybór dowolnego kierunku działania ze zbioru możliwych do podjęcia decyzji najczęściej nazywany jest wyborem ***strategii działania.***

Zbiór stanów świata zewnętrznego, zwany często ***stanami natury***, i nazywa zdarzenia, które mogą wystąpić w przyszłości i wpłynąć na wyniki poszczególnych strategii, a które nie są w danym problemie decyzyjnym bezpośrednio kształtowane (kontrolowane) przez podmiot podejmujący decyzje, tak jak kształtowane są kierunki działania. Innymi słowy, chodzi o zdarzenia, które występują niezależnie od wybranej strategii działania i ujawniają się po wyborze (i realizacji) którejś z nich. Liczba stanów natury odpowiada liczbie stanów, jaką może przyjąć dane zdarzenie. Jeśli założymy, że realizacja podjętej decyzji może napotkać warunki korzystne, niekorzystne lub obojętne dla efektu uzyskanego z wybranej strategii – to w tym przypadku powiemy, że liczba stanów natury wyniesie trzy.

Ponieważ każdej kombinacji kierunku działania i stanu świata zewnętrznego można przypisać jednoznacznie pewną korzyść. Czwarty element struktury problemu decyzyjnego nosi nazwę ***funkcji korzyści***. Rzecz jasna, czasami jest to korzyść ujemna: czyli strata, lub dodatnia czyli zysk. Wówczas gdy zbiór kierunków działania składa się ze skończonej liczby n strategii, a zbiór stanów świata zewnętrznego składa się ze skończonej liczby m stanów natury – liczba możliwych ich kombinacji (i odpowiadających im korzyści) równa jest $n \times m$. Graficznym obrazem funkcji korzyści jest w takiej sytuacji następująca macierz korzyści (***macierz wypłat***).

W klasycznej macierzy wypłat w kolumnach umieszcza się możliwe rozpoznane stany natury ($N_1, N_2, \ldots N_m$), a w wierszach znajduje się zbiór strategii (kierunków działania) możliwych do podjęcia. Elementami tej macierzy, na przecięciu wiersza każdej strategii i kolumny każdego stanu świata zewnętrzne-

go, są osiągnięte korzyści (w_{ij}) z realizacji *i*-tej strategii przy wystąpieniu *j*-tego stanu świata zewnętrznego.

Tabela 22. Klasyczna macierz wypłat (tablica korzyści) w ogólnej postaci

	N_1	N_2	….	N_m
S_1	w_{11}	w_{12}	….	w_{1m}
S_2	w_{21}	w_{22}	….	w_{2m}
….	….	….	….	….
S_n	w_{n1}	w_{n2}	….	w_{nm}

Włączenie niepewności co do stanu świata zewnętrznego i do analizy problemu decyzyjnego jest niezbędne (decyzja dotyczy przyszłości, która jest niepewna) i wymaga stosowania podstawowych pojęć i praw z teorii prawdopodobieństwa. Jej podstawowe pojęcie postrzega się przy tym dwojako. Po pierwsze, mówimy o prawdopodobieństwie obiektywnym (*objective probability*), jeśli prawdopodobieństwo wystąpienia jakiegoś zdarzenia ocenia się w kategoriach relatywnej częstości, z jaką dane zdarzenie występowało w podobnych warunkach w przeszłości. Po drugie, prawdopodobieństwo widzi się jako stopień wiary (wewnętrznego przekonania) jednostki w wystąpienie jakiegoś zdarzenia, w tym nawet takiego, które jeszcze nigdy w przeszłości nie wystąpiło w tym przypadku mówi się powszechnie o prawdopodobieństwie osobistym lub subiektywnym (*personal or subjective probability*).

To dwojakie rozumienie prawdopodobieństwa pozwala na odróżnienie ryzyka od niepewności (i oparta na nim typologia decyzji) sprowadza się do tego, że w przypadku ryzyka podmiot podejmujący decyzje zna prawdopodobieństwa wystąpienia stanów świata zewnętrznego, podczas gdy w przypadku niepewności mają one być nieznane decydentowi, a nawet mają być niemożliwe do określenia. Innymi słowy, o tym, czy mamy do czynienia z ryzykiem, czy z niepewnością, ma przesądzać znajomość (lub jej brak) rozkładu prawdopodobieństwa w zbiorze stanów świata zewnętrznego. Jeżeli teraz włączymy ryzyko (w postaci rozkładu prawdopodobieństwa) do przedstawionej powyżej tablicy korzyści, to przyjmie ona postać następującą:

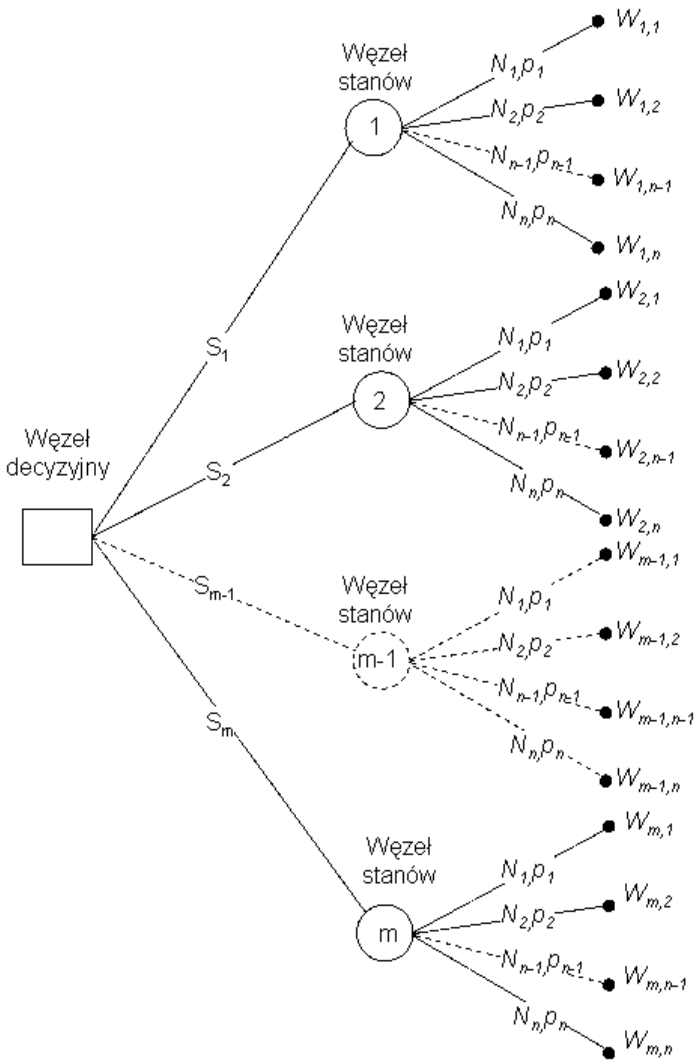
Tabela. 23. Postać macierzy wypłat ze znanym prawdopodobieństwem wystąpienia stanów natury

	N_1	N_2	….	N_m
	p_1	p_2	….	p_m
S_1	w_{11}	w_{12}	….	w_{1m}
S_2	w_{21}	w_{22}	….	w_{2m}
….	….	….	….	….
S_n	w_{n1}	w_{n2}	….	w_{nm}

gdzie

p_i – oznacza prawdopodobieństwo wystąpienie *i*-tego stanu świata zewnętrznego.

Przedstawienie problemu decyzyjnego w postaci (jednej) tablicy decyzyjnej może być niekiedy trudne, a nawet niemożliwe. Chodzi w szczególności (ale nie wyłącznie) o przypadek, gdy problem decyzyjny ma charakter sekwencyjny, a więc gdy przed decydentem rozciąga się cały szereg powiązanych z sobą decyzji, a nie jedna niezwłoczna decyzja kończąca odrębną kwestię. Wówczas dogodnym sposobem przedstawienia problemu decyzyjnego jest wykres zwany ***dendrytem*** lub ***drzewem decyzyjnym*** (rys. 101).



Rysunek 101. Jednoetapowe drzewo decyzyjne

Drzewo decyzyjne składa się z trzech rodzajów węzłów i gałęzi łączących te węzły z sobą.

Rozróżnia się węzły decyzyjne (oznaczone prostokątem), w których decydent dokonuje wyboru oraz **węzły natury** (oznaczone kółkiem), w których zachodzi losowe działanie przypadku i **węzły wynikowe** (liście), które przedstawiają wartości wypłat, jako wyniku realizacji danej strategii działania przy zaistnieniu określonego stanu natury.

W węźle decyzyjnym podejmujemy, w sposób alternatywny jedną z m możliwych strategii działania [s_1, s_2, …. s_{m-1}, s_m]. Każda z przyjętej strategii działania w trakcie realizacji napotyka na warunki zdefiniowane przez jeden z *n* stanów natury, których prawdopodobieństwo zajścia wynosi p_n. W rezultacie przyjęcia określonej strategii przy wystąpieniu danego stanu natury realizują się wartości wypłat (zysku lub straty) $w_{m,n}$.

W przedstawionym w tabeli 23 problemie decyzyjnym, decydent nie zna prawdopodobieństwa wystąpienia określonych stanów natury lub nie zamierza z tego prawdopodobieństwa korzystać. Optymalną strategię można wybrać, stosując jedną z kilku alternatywnych reguł decyzyjnych[17].

- kryterium Walda (reguła max–min),
- kryterium Hurwicza,
- kryterium Bayes'a,
- kryterium optymistyczne (max–max),
- kryterium Savage'a.

Decydent, podejmując decyzję musi jednak zdecydować się na wybór reguły, bowiem każda z nich oparta jest na innych założeniach i daje inne wyniki.

Kryterium Walda jest kryterium ostrożnym (zakład, że zajdzie sytuacja najmniej korzystna dla decydenta). Dlatego, dla każdej *i*–tej strategii (każdego wiersza) macierzy wypłat należy określić najmniejszą wartość (minimalną stopę zysku), jaką otrzymujemy przy wystąpieniu *j*–tego stanu natury, a następnie wybrać strategię, dla której ta minimalna wygrana jest największa, czyli:

$$\nu = \max_i \{ \min_j w_{ij} \}$$

Kryterium Hurwicza, tu punktem wyjścia jest arbitralny wybór *współczynnika ostrożności* λ $(0 \le \lambda \le 1)$. Dla każdej strategii należy obliczyć przeciętną korzyść wg wzoru:

$$\nu_i(\lambda) = \lambda \min_j(w_{ij}) + (1-\lambda)\max_j(w_{ij})$$

a następnie wybrać tę strategię, dla której $\nu_i(\lambda)$ przyjmuje wartość maksymalną.

[17] Elementami macierzy wypłat w omawianym problemie decyzyjnym są zyski (lub straty jeśli element występuje ze znakiem ujemnym), które mają wymiar pieniężny, zatem problem decyzyjny będzie polegał na maksymalizacji oczekiwanych zysków lub minimalizacji oczekiwanych strat.

W zależności od wyboru współczynnika ostrożności kryterium Hurwicza może stać się regułą bardzo ostrożną (przy $\lambda = 1$ pokrywa się z kryterium Walda), albo skrajnie hazardową (przy $\lambda = 0$ sprowadza się do wyboru maksymalnej z największych możliwych wypłat, a więc wyboru ***kryterium optymistycznego***).

Kryterium Bayesa to kryterium, według którego najlepszą jest strategia, która daje największą przeciętną korzyść (stopę zysku) obliczaną dla każdej strategii (przy założeniu, że wszystkie stany natury są jednakowo prawdopodobne) jako zwykłą średnią arytmetyczną wg wzoru:

$$\nu_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}.$$

Może się zdarzyć, że prawdopodobieństwo występowania poszczególnych stanów natury jest znane i wówczas przeciętną stopę korzyści oblicza się jako średnią arytmetyczną ważoną (wartość oczekiwaną) $\nu_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} p_j$

gdzie p_j jest prawdopodobieństwem wystąpienia j-tego stanu natury. Jako optymalną decyzję uznamy taką, która maksymalizuje wyliczoną dla każdej strategii średnią ważoną. Mówimy wtedy o ***maksymalnej oczekiwanej korzyści***.

Kryterium Savage'a zwane *kryterium minimalnego żalu*. Punktem wyjścia reguły decyzyjnej minimalnego żalu (Savage'a) jest chęć zminimalizowania utraconych korzyści, związanych z podjęciem decyzji, która okazała się nietrafna w kontekście zrealizowanego stanu natury. Chcąc wykorzystać tę regułę, przeprowadzamy obliczenia wstępne. Pierwszym etapem jest znalezienie macierzy strat relatywnych. Strata jest różnicą między największą wypłatą (stopą zysku) możliwą dla danego stanu natury a wypłatą odpowiadającą podjętej decyzji. Dla każdej kolumny macierzy wypłat (każdego stanu natury) straty relatywne (γ_{ij}) oblicza się ze wzoru:

$$\gamma_{ij} = \max_i w_{ij} - w_{ij}.$$

Następnie dla każdej strategii należy określić maksymalną stratę i wybrać strategię, dla której maksymalna strata będzie najmniejsza, czyli:

$$\nu = \min_i \{ \max_j \gamma_{ij} \}.$$

Bardzo często proces decyzyjny z wykorzystaniem drzewa decyzyjnego podejmujemy w warunkach ryzyka, gdy znany jest rozkład prawdopodobieństwa przyszłych stanów natury. Poniżej na przykładach procesów decyzyjnych jedno- i wieloetapowych przedstawione zostaną zasady poszukiwania optymalnych decyzji za pomocą drzewa decyzyjnego. Jako kryterium decyzyjne w tych przykładach zostanie wybrana ***reguła maksymalnej oczekiwanej korzyści***.

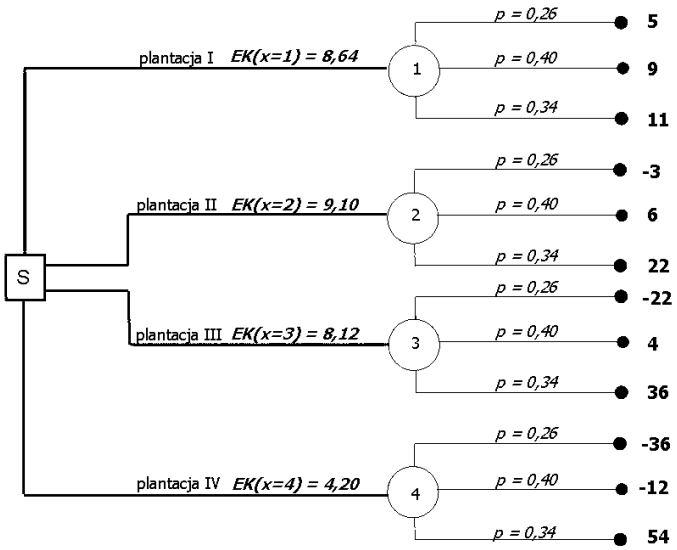
10.1.1. Jednoetapowe drzewo decyzyjne

Rozpatrzmy przykład procesu decyzyjnego rolnika, który ma podjąć decyzję o przyszłorocznych zasiewach posiadanego areału. Z analizy swoich możliwości produkcyjnych wie, że do dyspozycji ma cztery rodzaje plantacji, których plonowanie uzależnione jest od warunków klimatycznych, występujących w okresie wegetacji – od warunków skrajnie niekorzystnych, które przynoszą straty – do warunków korzystnych, w których może liczyć na osiągnięcie dużego zysku. Many zatem do czynienia z jednoetapowym problemem decyzyjnym, dla którego macierz wypłat zawiera tabela.

Tabela 24. Macierz wypłat dla jednoetapowego procesu decyzyjnego

Strategia	Zysk rolnika w określonych warunkach klimatycznych		
	niekorzystnych p = 0,26	przeciętnych p = 0,40	korzystnych p = 0,36
plantacja I	5	9	11
plantacja II	-3	6	22
plantacja III	-22	4	36
Plantac ja IV	-36	-12	54

Reguła **maksymalnej oczekiwanej korzyści** polega na obliczeniu oczekiwanej korzyści dla poszczególnych decyzji uwzględniających rozkład prawdopodobieństwa występowania kolejnych stanów natury. Rekomendowaną decyzją będzie ta, dla której oczekiwana korzyść jest największa.



Rysunek 102. Jednoetapowe drzewo decyzyjne – przykład podejmowania decyzji optymalnej

Na rysunku 102 przedstawiony został dendryt decyzyjny (drzewo decyzyjne) sporządzone na podstawie macierzy wypłat zamieszonej w tabeli 24.

W węźle decyzyjnym S rozpatrujemy możliwe do podjęcia cztery decyzje (strategie działania). Graficznie przedstawione zostały w formie krawędzi do węzła decyzyjnego S do węzłów stanu odpowiednio od 1 do 4 i prezentują możliwość wyboru jednej z czterech plantacji (I – IV). Dalej w każdym węźle stanu, podjęta decyzja o wyborze strategii (plantacji) może być realizowana w warunkach określonych przez jeden z trzech stanów natury (niekorzystnych, przeciętnych i korzystnych) występujących z określonym dla siebie prawdopodobieństwem $\{p_1 = 0,26,\ p_2 = 0,4\ i\ p_3 = 0,34\}$. W węzłach wynikowych znajdują się elementy macierzy wypłat (zyski lub straty) osiągnięte w wyniku realizacji określonej strategii przy zaistniałym stanie natury.

Poszukiwania optymalnej decyzji (według kryterium maksymalnej oczekiwanej korzyści) rozpoczniemy od prawej strony drzewa decyzyjnego, wyznaczając dla każdej strategii sumę iloczynów wartości wypłat (elementów macierzy wypłat) i prawdopodobieństwa ich wystąpienia.

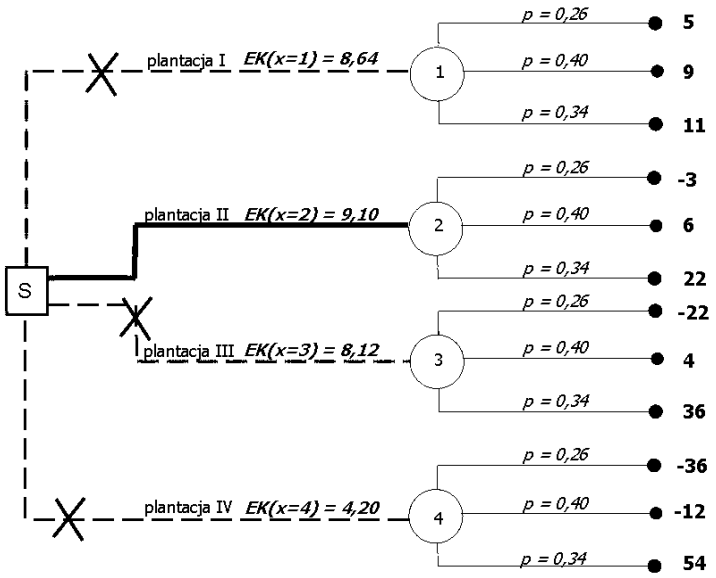
Jeśli przyjmiemy, że $\boldsymbol{EK\ (x = k),\ i = 1\ ,\ \ldots,\ k}$ oznacza oczekiwaną korzyść dla $\boldsymbol{k}$ – tej strategii – to możemy wyznaczyć wartości oczekiwanych korzyści dla poszczególnych decyzji rolnika:

$\boldsymbol{EK\ (x = 1)}$ = 9 ·0,26 + 5 · 0,40 + 11 · 0,34 = 1,4 + 2,0 + 3,74 = **8,08,**

$\boldsymbol{EK\ (x = 2)}$ = -3 ·0,26 + 6 · 0,40 + 22 · 0,34 = -0,78 + 2,4 + 7,48 = **9,10,**

$\boldsymbol{EK\ (x = 3)}$ = -22 ·0,26 + 4 · 0,40 + 36 · 0,34 = -5,72 + 1,6 + 12,24 = **8,12,**

$\boldsymbol{EK\ (x = 4)}$ = -36 ·0,26 - 12 · 0,40 + 54 · 0,34 = -9,36 - 4,8 + 18,36 = **4,20.**



Rysunek 103. Jednoetapowe drzewo decyzyjne – rozwiązanie przykładu

Jako rekomendowaną strategię rolnika przyjmiemy decyzję o obsianiu swojego areału plantacją drugą, bowiem średnia oczekiwana wartość uzyskanych korzyści wynosi 9,10 jednostek pieniężnych, a więc największy oczekiwany zysk ze wszystkich możliwych.

Problemy decyzyjne jednoetapowe są na ogół proste i przejrzyste, i jako takie mogą być rozwiązywane bezpośrednio z wykorzystaniem drzewa decyzyjnego, jak również na podstawie macierzy wypłat bez konieczności wykreślnego opisywania problemu w postaci drzewa. W takim przypadku optymalną decyzję wyznaczamy, wykorzystując odpowiednie formuły matematyczne, właściwe dla przyjętych, alternatywnych reguł decyzyjnych.

10.1.2. Wieloetapowe drzewo decyzyjne

Proces podejmowania decyzji w świecie realnym zwykle jest bardziej skomplikowany, niż przedstawiony problem decyzyjny jednoetapowy. Podejmowane decyzje są zazwyczaj wynikiem decyzji podjętych wcześniej oraz decyzje, w które w tej chwili podejmujemy implikują decyzje podejmowane w przyszłości. W takich przypadkach, poszukiwanie decyzji optymalnych, gdy znane jest prawdopodobieństwo zajścia określonych stanów natury i ich skutków rozpoczynamy od wykreślenia odpowiedniego drzewa decyzyjnego ilustrującego strukturę procesu decyzyjnego.

Rada gminy podjęła decyzję o ogłoszeniu przetargu na budowę specjalistycznej oczyszczalni ścieków. Oczyszczalnia nie jest typową oczyszczalnią, a jej konstrukcja ma zapewnić wysoki stopień oczyszczania ścieków, odpowiedni do funkcji gospodarczej gminy. W ofercie przetargowej określono, że kontrakt zostanie przyznany wyspecjalizowanej jednostce, mającej dobrą reputację i oferującej najlepsze rozwiązanie zaś wartość kontraktu nie powinna przekroczyć 200 tys. euro.

Ofertą zainteresowana jest firma ECOBUD SA. Dyrektor firmy ocenił, że koszty przygotowania kontraktu wyniosą 25 tys. euro, zaś szansę wygrania kontraktu oszacował na 60%. Zatem pierwszy dylemat sprowadza się do decyzji czy w ogóle uczestniczyć w przetargu (decyzja A) lub też zrezygnować bez ponoszenia kosztów (decyzja B).

W przypadku wygrania konkursu firma może podjąć trojakiego rodzaju działania w celu realizacji zamówienia.

Wariant pierwszy (decyzja C) obejmuje działania, polegające na zakupie gotowego, sprawdzonego w podobnych warunkach systemu oczyszczania ścieków. Osiągnięcie wymaganego stopnia oczyszczania ścieków w tym wariancie obarczone jest dużą niepewnością i to rozwiązanie może nie być przyjęte przez inwestora. Koszt realizacji oczyszczalni w tym wariancie wynosi 25 tys. euro, ale szanse zrealizowania kontraktu to tylko 25%.

W przypadku drugiego z rozpatrywanych wariantów (decyzja D) możliwe jest wykorzystanie gotowego projektu sporządzonego dla warunków podobnych, lecz wymagającego jeszcze pewnych prac o charakterze badawczym i projektowym. Projekt taki byłby bliski wymaganiom stawianym przez inwestora, koszt takiego rozwiązania wynosi 75 tys. euro. Z uwagi na to, że projekt będzie odbiegał nieco od założonych przez inwestora wymogów, szanse jego przyjęcia oceniane są na 75%.

Wariant trzeci (decyzja E) polega na przeprowadzeniu od podstaw prac badawczych i badań prototypowych, gwarantuje spełnienie wszystkich wymogów stawianych przez inwestora, lecz kosztuje 125 tys. euro, daje jednak 100% szans na realizację zlecenia i wywiązanie się z kontraktu.

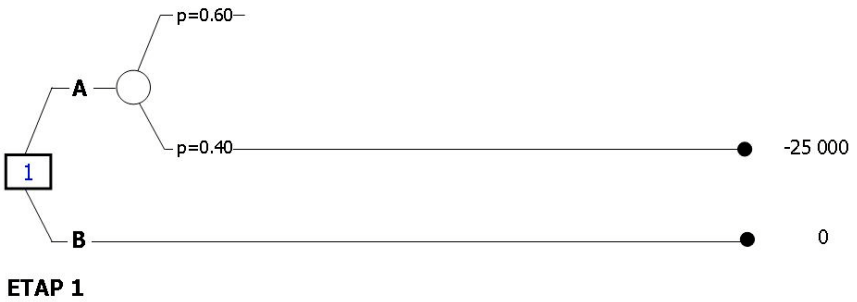
Podpisując kontrakt, firma ECOBUD SA zobowiązuje się do zrealizowania kontraktu. W przypadku, gdy podjęte działania nie przyniosą efektu, firma ECOBUD SA zmuszona będzie do podjęcia innych działań w celu wywiązania się z kontraktu.

Powstaje zatem problem, polegający na podjęciu decyzji o przystąpieniu bądź nie przystępowaniu do przetargu – biorąc po uwagę koszt uczestnictwa w postępowaniu przetargowym i przewidywane szanse jego wygrania. W razie podjęcia decyzji o uczestnictwie w przetargu i jego wygraniu – pozostaje problem – który z wariantów wybrać, by wywiązać się z kontraktu przy maksymalizacji spodziewanego zysku.

Prawdopodobieństwa zrealizowania kontraktu w poszczególnych wariantach i ich koszty są znane.

Rozwiązanie tego problemu decyzyjnego wymaga poprawnego skonstruowania wieloetapowego drzewa decyzyjnego, a potem jego rozwiania, przyjmując za kryterium maksymalizację oczekiwanych korzyści.

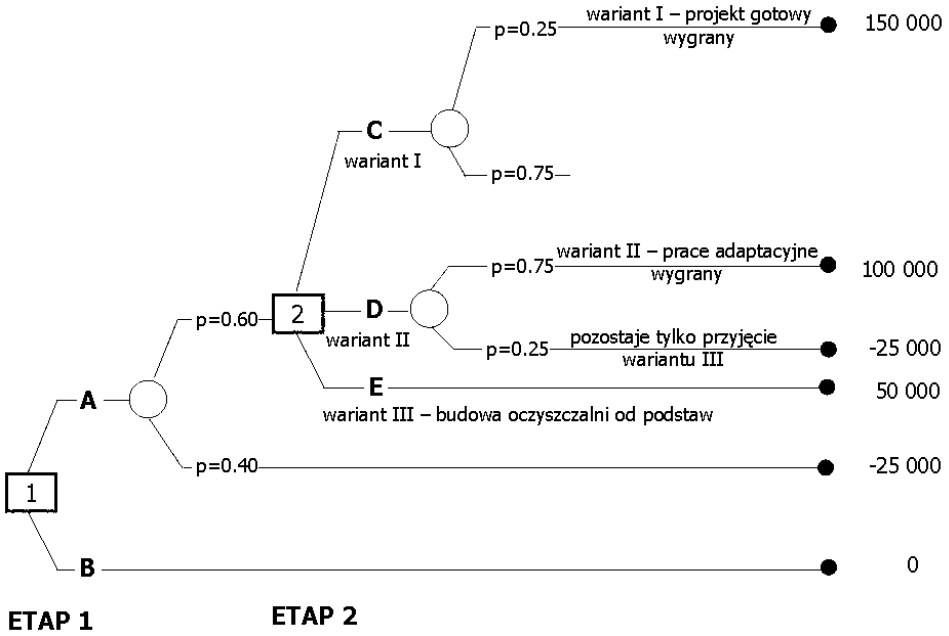
Poniżej przedstawimy tok postępowania przy konstrukcji takiego drzewa.



Rysunek 104. Wieloetapowe drzewo decyzyjne – etap 1

Na rysunku 104 przedstawiono pierwszy krok w tworzeniu drzewa decyzyjnego. W węźle decyzyjnym 1 problem decyzyjny polega na wyborze jednej

z dwóch alternatywnych decyzji. Decyzja B o nieprzystępowaniu do przetargu (bez kosztów, ale i bez zysku) lub decyzja A o uczestnictwie w przetargu. Wybór decyzji A jest weryfikowany w węźle stanów. Niewygranie kontraktu wiąże się ze stratą 25 tys. euro poniesioną na przygotowanie oferty przetargowej. Jeśli jednak kontrakt zostanie wygrany (*p = 0,6*) powstanie nowy problem decyzyjny, który z trzech możliwych wariantów przyjąć do realizacji kontraktu.



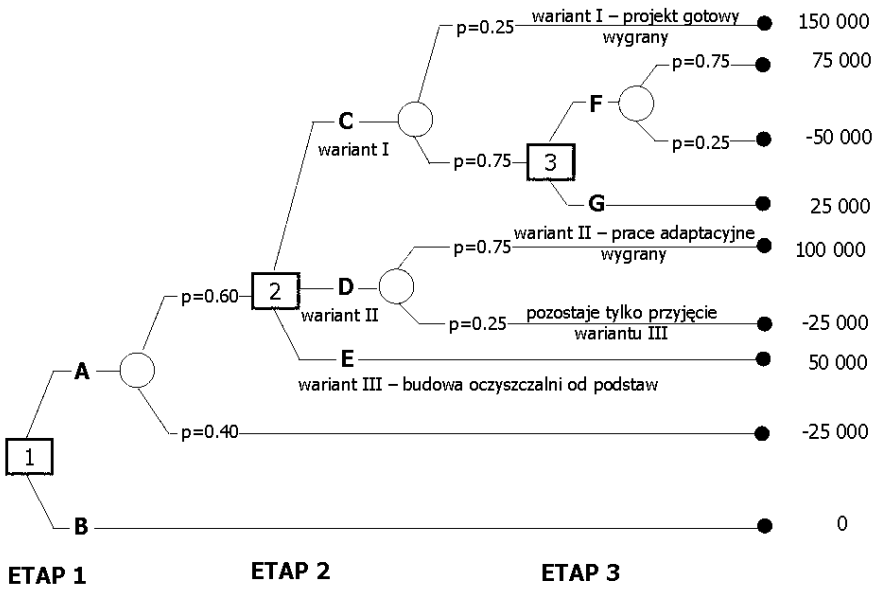
Rysunek 105. Wieloetapowe drzewo decyzyjne – etap 2

W drugim etapie procesu decyzyjnego możliwe jest podjęcie jednej z trzech wykluczających się decyzji (C, D, i E). Podjęcie decyzji E (przeprowadzenie od podstaw badań prototypowych i budowa oczyszczalni spełniającej wymagania inwestora) gwarantuje wywiązanie się z kontraktu (*p = 1*). Jak pamiętamy, koszt takiego kroku wynosi 125 tys. euro, co razem z poniesionym kosztem przygotowania kontraktu 25 tys. euro, daje w rezultacie końcowy zysk 50 tys. euro. (*200 tys. – 25 tys. – 125 tys. = 50 tys.*). Stąd w węźle wynikowym (liściu drzewa) wartość 50 000. Pozostałe dwie możliwe decyzje C i D składają możliwe dwa scenariusze. Decyzja D (o prawdopodobieństwie powodzenia *p = 0,75*) polega na wykorzystaniu projektu, który sprawdził się już w podobnych warunkach. W przypadku powodzenia tej decyzji zysk wyniesie 100 tys. euro (*200 tys. – 25 tys. – 75 tys. = 100 tys.*). Jednak w przypadku niepowodzenia tej decyzji (*p = 0,25*) firma ECOBUD SĄ, zobowiązując się do bezwzględnego wywiązania się z kontraktu, poniesie stratę w wysokości 25 tys. euro. Do ponie-

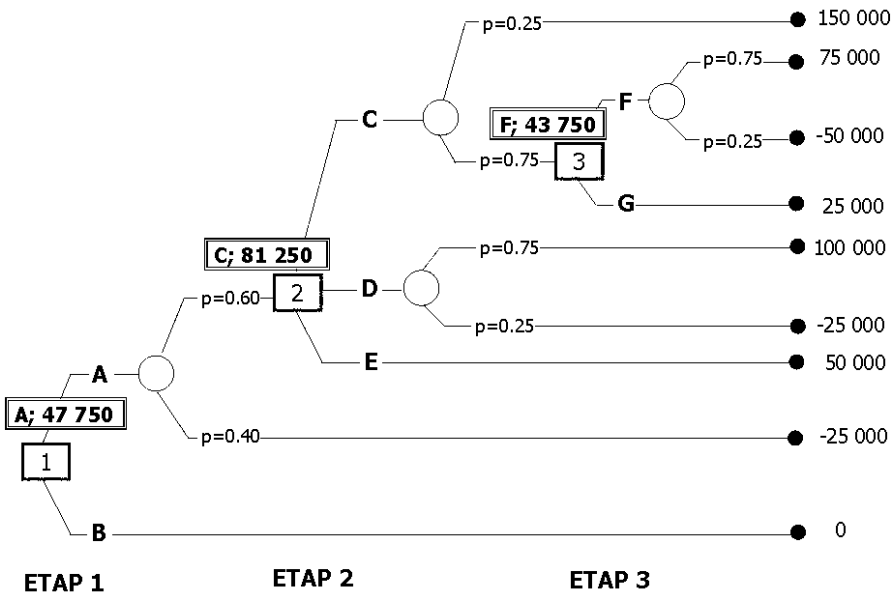
sionych już kosztów w wysokości 25 tys. euro (oferta przetargowa) i 75 tys. euro (koszty adaptacyjne projektu niesprawdzonego) dochodzą koszty, jakie należy ponieść, by uzyskać pewność wywiązania się z kontraktu – a więc wariant trzeci z przeprowadzeniem prac badawczo-projektowych od podstaw (125 tys. euro) (*200 tys. – 25 tys. – 75 tys. – 125 tys. = – 25 tys.*)

Dla pełnej analizy drugiego etapu decyzyjnego pozostaje jeszcze rozważenie decyzji C, o prawdopodobieństwie sukcesu *p= 0,25* (budowa oczyszczalni na podstawie gotowych rozwiązań). W przypadku podjęcia tej decyzji i przyjęcia jej do realizacji zysk dla firmy wyniesie 150 tys. euro. (*200 tys. – 25 tys. – 25 tys. = 150 tys.*). Jeśli jednak ten wariant nie zostanie zrealizowany, co jest wysoce prawdopodobne (*p = 0,75*), pozostaje do rozwiązania problem wyboru następnego ciągu decyzji – etap decyzyjny trzeci.

W trzecim etapie decyzyjnym (rys. 106) pozostają do rozważenia dwie możliwe decyzje. Decyzja G (opracowanie konstrukcji od podstaw) gwarantuje realizację kontraktu i uzyskanie jeszcze zysku 25 tys. (*200 tys. –25 tys. – 25 tys. – 125 tys. = 25 tys.*). Podjecie, w trzecim etapie decyzji F (prace badawczo-adaptacyjne nad gotowym projektem oczyszczalni), również obarczone ryzykiem niepowodzenia (*p = 1–0,75*), i w tym przypadku przynosi stratę 50 tys. euro. (*200 tys. –25 tys. – 25 tys. –75 tys. –125 tys. = –50 tys.*) W przypadku jednak sukcesu przynosi zysk 75 tys.



Rysunek 106. Wieloetapowe drzewo decyzyjne – etap 3



Rysunek 107. Wieloetapowe drzewo decyzyjne – wybór ciągu decyzji optymalnych

Korzystając z formuł wyznaczania optymalnych decyzji, przy kryterium maksymalnej oczekiwanej korzyści optymalnym ciągiem decyzji, powinien być ciąg:

W ***etapie decyzyjnym 3*** jako rekomendowaną decyzję należy przyjąć decyzję F. Oczekiwana wartość zysku dla tej decyzji wynosi:

EK (3) → EK (F) = 75 000 ∗ 0,75 + (–50 000 ∗ 0,25) = **43 750**

EK(G) = 25 000

EK(F) > EK(G).

W ***etapie decyzyjnym 2*** jako rekomendowaną decyzję należy przyjąć decyzje C.

EK(2) → EK(C) = 150 000 ∗ 0,25 + 43 750 ∗ 0,75 = **81 250**

EK(D) = 100 000 ∗ 0,75 + (–25 000 ∗ 0,25) = 68 750

EK(E) = 50 000

EK(C) > EK(D) > EK(E).

W ***etapie decyzyjnym 1*** jako rekomendowaną decyzję z punktu widzenia przyjętego kryterium należy uznać decyzję A, przy podjęciu której oczekiwana wartość zysku wynosi 47 750 euro, podjęcie bowiem decyzji B nie generuje żadnego zysku.

EK(1) → EK(A) = 81 250 ∗ 0,6 + (–25 000 ∗ 0,4) = **47 750**
EK(B) = 0
EK(A) > EK(B).

Ostatecznie więc ścieżka racjonalnych zachowań decydenta, która maksymalizuje oczekiwany zysk, jakiego należy się spodziewać, biorąc udział w przetargu na budowę oczyszczalni ścieków, powinna wyglądać następująco:

Racjonalnym jest podjecie decyzji **A** o wzięciu udziału w przetargu. W przypadku jego wygrania dyrektor firmy ECOBUD SA powinien podając decyzję **C** o przedstawieniu inwestorowi gotowego projektu oczyszczalni już istniejącej. Gdyby jednak ta decyzja zakończyła się fiaskiem pozostaje jako najbardziej racjonalna decyzja **F** o przedstawieniu do realizacji projektu opartego na adaptacji istniejących rozwiązań.

11. MODELOWANIE PRODUKCJI – DRZEWO PRODUKTU

Modelowanie produkcji jest dziedziną wiedzy związaną z logistyką gospodarki zapasami oraz przepływami materiałowymi we wszystkich fazach produkcji. Miejsce modelowania produkcji w tym podręczniku, skoncentrowanym głównie na metodach aplikacyjnych teorii grafów i sieci w zarządzaniu, wynika z jeszcze jednej okazji przedstawienia grafu (drzewa produktu) do wspomagania procesu planowania produkcji.

Podstawą planowania produkcji są dwa strumienie informacji. Jeden tworzą zamówienia napływające z określonym wyprzedzeniem, drugi zaś prognozy marketingowe. W rzeczywistym planowaniu produkcji modele optymalizacyjne powinny odgrywać role zasadnicze. Do podstawowych modeli zaliczymy zadania tworzenia list materiałowych dla produktów i zapotrzebowania materiałowego dla planowanej produkcji. Są to zadania rozwiązywane, na ogół komputerowo, w ramach systemów typu MRP (*Material Requirement Planning*). Jedną z metod przedstawienia przepływów materiałowych w procesie produkcji i określania podstawowych zależności między wejściem i wyjściem procesu produkcyjnego jest drzewo produktu zwane w literaturze grafem Gozinto[18].

Właściwe zrozumienie planowania przepływów materiałowych z wykorzystaniem drzewa produktu wymaga znajomości podstawowych pojęć z dziedziny modelowania produkcji. Procesem produkcji możemy nazwać celowo i świadomie wykonywany zestaw czynności lub operacji, w wyniku których określony zbiór obiektów wejściowych (np. surowców lub części jednostkowych) zostaje doprowadzony do postaci pewnego zbioru obiektów wyjściowych, nazywanych produktami finalnymi lub końcowymi tego procesu[19].

Obiektami materialnymi biorącymi udział w procesie produkcji, będącymi przedmiotem modelowania są:

- wyroby finalne,
- półprodukty,
- części jednostkowe,
- surowce.

---

[18] Ideę takiego ujęcia zaproponował A. Vaszonyi, który grafy produktu nazwał grafami Gozinto. Nazwę te opartą na wymowie określenia „*the part that goes into*" zamienił na nazwisko fikcyjnego włoskiego matematyka Zepartzat Gozinto i tym samym uatrakcyjnił zarówno nazwę jak i ideę prezentacji procesu technologicznego (St. Krawczyk, *Metody ilościowe w logistyce*. Wydawnictwo C.H. Beck. Warszawa 2001.

[19] Zob. *Elementy rachunku ekonomicznego*. Praca zbiorowa pod redakcją naukową Z. Hellwiga, wydanie III. Warszawa 1985

Produktem końcowym lub finalnym jest każdy wytworzony na wyjściu procesu obiekt, który może być oferowany do transakcji sprzedaży.

Półproduktami wyróżnianymi w modelowaniu są obiekty powstające na wyodrębnionych stanowiskach, w pewnej fazie procesu produkcyjnego, które przetworzone w następnych fazach procesu włączone zostają do wyrobu finalnego. Z uwagi na stopień przetworzenia w procesie technologicznym półprodukty mogą również podlegać transakcji sprzedaży.

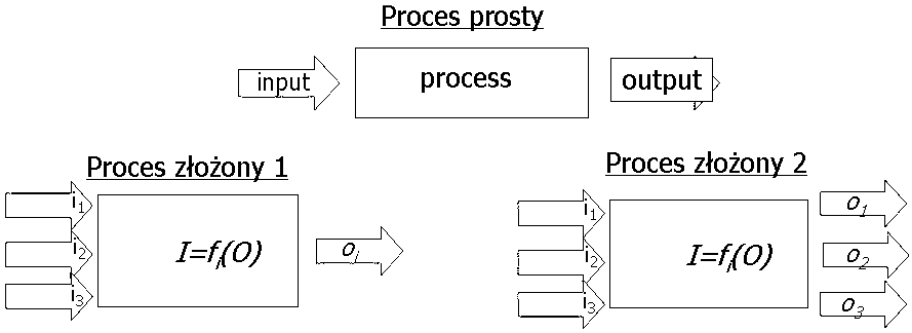
Część jednostkowa w ujęciu modelowym jest specyficznym obiektem, który w zasadzie będziemy dołączać albo do grupy surowców, albo do półproduktów. Są to obiekty uzyskiwane z surowców jako efekt tzw. elementarnej operacji wytwarzania niezależnej od właściwego procesu produkcji.

Surowcami są dowolne obiekty o różnym stopniu złożoności, które są nabywane poza przedsiębiorstwem i wprowadzane do dalszego przetwarzania w procesie produkcji.

Przedstawione wyżej definicje podmiotowych obiektów materialnych nie są, w ujęciu modelowania produkcji, definicjami uniwersalnymi. Zostały sformułowane tu wyłącznie dla potrzeb budowy drzewa produktu i wyjaśnieniu idei modelowania przepływów surowcowych w procesach produkcji.

W ujęciu modelowym obiekty i operacje wykonywane na nich będą przedstawiane za pomocą symboli i liczb. Istotną dla nas będzie rola, jaką dana liczba lub zapis symboliczny ma do odegrania w modelu. W rozpatrywanych tutaj modelach produkcji będziemy zakładać, że wyjście procesu w sposób jednoznaczny determinuje jego wejście. Innymi słowy, na podstawie znajomości popytu na wytworzone dobra będziemy mogli wyznaczyć zapotrzebowanie na surowce. Analogiczne założenie będzie odnosiło się do wytwarzania półproduktów.

Proces produkcji w ogólnej postaci można przedstawić jako system wejścia–wyjścia (rys. 108).



Rysunek 108. Schemat procesów prostych i złożonych z wejściem i wyjściem

Proces produkcji jednego produktu finalnego będziemy przedstawiać graficznie, odzwierciedlając kolejne etapy wytwarzania za pomocą określonych elementów graficznych. Uzyskany w ten sposób obraz powstawania produktu jest obiektem znanym w teorii grafów jako drzewo, ponieważ odzwierciedla powstawanie produktu, nazywany jest drzewem produktu. Aktywnościami przedstawionymi za pomocą drzewa są: stanowiska pracy, na których można wyróżnić poszczególne etapy procesu produkcyjnego, przemieszczenia materiałowe między stanowiskami (etapami).

Stanowiska lub etapy produkcji prezentowane są w grafie jako węzły, natomiast przemieszczanie surowców i półproduktów przedstawione są za pomocą strzałek lub krawędzi, gdy kierunek przemieszczania jest oczywisty.

W rozpatrywanym modelu procesu produkcji węzły powinny odzwierciedlać operacje wykonywane na danym stanowisku lub na danym etapie produkcji. Efektem tych operacji są wytworzone obiekty (części, półfabrykaty) jednoznacznie określone co do ilości (przynajmniej w sensie statystycznym). Krawędzie zaś, są oznaczone i przedstawiają rodzaj i ilość obiektów (surowców, półfabrykatów) potrzebnych do wykonania operacji symbolizowanych przez węzeł (dla krawędzi dochodzących do węzła) lub ilość i rodzaj wytworzonych w węźle obiektów (surowców, półfabrykatów) – dla krawędzi wychodzących z węzła. Węzeł końcowy drzewa produktu symbolizuje etap wykonania wyrobu finalnego.

Jeśli drzewo produktu służy również do analizy nakładów lub czasu wytwarzania wyrobu, to czas poszczególnych operacji musi być jednoznacznie określony (przynajmniej w sensie statystycznym) i nakłady czasu muszą być proporcjonalne do ilości powstających wyrobów.

Jak już wspomniano, przemieszczenia półproduktów i surowców między węzłami (stanowiskami) są przedstawiane za pomocą strzałek lub krawędzi. Strzałce wprowadzonej miedzy węzeł ***i*** oraz węzeł ***j*** przyporządkowana jest liczba (tzw. współczynnik bezpośrednich nakładów jednostkowych) informująca, ile jednostek wyrobu wytworzonego w węźle ***i*** (może to być również magazyn surowców) musi być przekazanych do stanowiska reprezentowanego przez węzeł ***j***, aby na tym stanowisku mogła powstać 1 jednostka wyrobu.

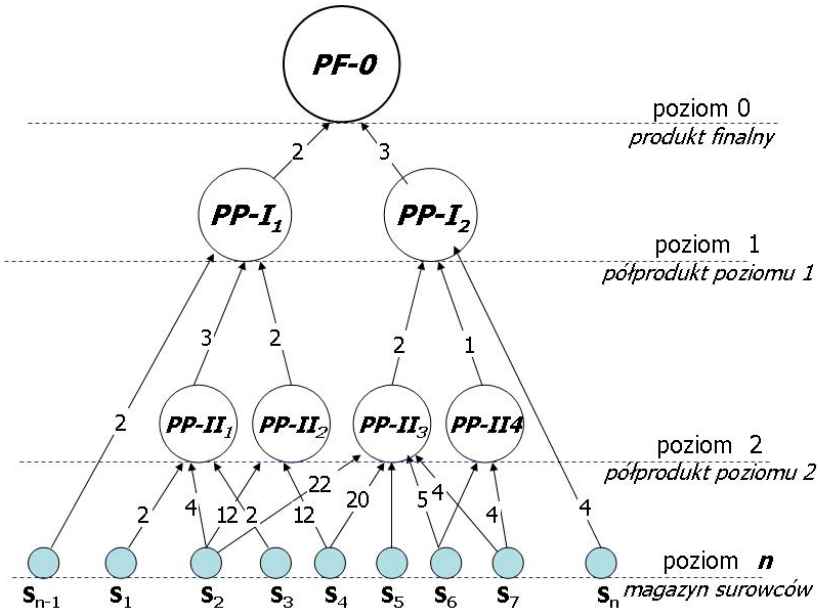
Drzewo produktu określone jest więc przez:

– węzły odpowiadające stanowiskom wytwarzania półproduktów, a w przypadku surowców – magazynowi,

– strzałki lub krawędzie przedstawiające bezpośrednie przepływy materiałowe miedzy stanowiskami,

– liczby przyporządkowane strzałkom lub krawędziom informujące o wielkości współczynników bezpośrednich nakładów jednostkowych.

Przestawiony na rysunku 109 graf Gozinto obrazuje wieloetapowy proces produkcyjny doprowadzający do wyprodukowania wyrobu finalnego ***PF***.



Rysunek 109. Drzewo produktu (graf Gozinto) – w ogólnej postaci

Na najniższym poziomie (***n***) tego procesu znajduje się magazyn surowców, z którego są pobierane, w odpowiednich ilościach, surowce do produkcji na wyższych etapach. O ilości pobranych surowców i półproduktów do wyższego poziomu procesu produkcyjnego informują etykiety przypisane każdej krawędzi. Na poziomie drugim procesu produkcyjnego wytwarzane są cztery półprodukty: ($PP–II_1$), ($PP–II_2$), ($PP–II_3$) i ($POP–II_4$).

Na poziomie pierwszym tego procesu wytwarzane są dwa półprodukty: ($PP–I_1$) i ($PP–I_2$) powstałe z odpowiednich ilości półproduktów na pierwszym, drugim oraz dodatkowo pobranych z magazynu surowców $\boldsymbol{S_{n-1}}$ i $\boldsymbol{S_n}$.

Na poziomie zerowym wytworzony jest wyrób końcowy złożony z odpowiednich proporcji półproduktów: (***PP–I₁***) i (***PP–I₂***).

Przyjęta konwencja wyróżniania poziomów wytwarzania umożliwia opracowanie postępowania numerycznego, doprowadzającego do sporządzenia ***listy materiałowej produktu***. Lista ta informuje, jakie jest łączne zapotrzebowanie surowcowe w określonym węźle na wytworzony w nim wyrób (obiekt), aby mogła powstać 1 jednostka wyrobu końcowego. Jest to tzw. ***zapotrzebowanie wewnętrzne*** w węźle ***k,*** gdyż półprodukty (obiekty) w nim wytworzone są wykorzystane w dalszym toku procesu produkcyjnego.

Jeśli część obiektów wytworzonych w węźle ***k*** nie jest wprowadzana dalej do produkcji tylko jest odsprzedawana w postaci półproduktów, to tę część nazywamy ***zapotrzebowaniem zewnętrznym.***

Możemy zatem powiedzieć, że konstrukcja grafu Gozinto umożliwia podanie algorytmu wyznaczania zapotrzebowania na półprodukty i surowce, gdy znane są zamówienia zewnętrzne na produkty końcowe i półprodukty będące obiektami sprzedaży.

11.1. TWORZENIE LISTY MATERIAŁOWEJ NA PODSTAWIE GRAFU GOZINTO

Przyjęty sposób wyróżniania poziomów wytwarzania umożliwia podanie prostego postępowania numerycznego, którego celem jest sporządzenie listy zapotrzebowania materiałowego produktu. Lista materiałowa podaje dla każdego węzła k, jakie jest łączne zapotrzebowanie na reprezentowany przez ten węzeł wyrób, aby mogła powstać *1* jednostka produktu końcowego. Ponieważ jest to zapotrzebowanie wynikające z potrzeb produkcji, nazywamy go ***zapotrzebowaniem wewnętrznym***.

Wprowadźmy oznaczenia pomocnicze[20]:

p – węzeł, w którym powstaje produkt końcowy,

V – zbiór wszystkich węzłów drzewa,

V_k – zbiór poprzedników węzła k,

y_k – zapotrzebowanie wewnętrzne na wyrób reprezentowany przez węzeł k,

a_{jk} – współczynnik bezpośredniego nakładu wyrobu węzła j na jednostkę wyrobu wytwarzanego w węźle k,

i – numer poziomu wykonawczego,

W_i – węzły i-tego poziomu wykonawczego.

Algorytm postępowania przedstawimy na przykładzie grafu Gozinto zamieszczonego na rysunku 97. Algorytm ten jest postępowaniem iteracyjnym wykonywanym w następujących krokach:

(1) – $W_0=\{p\}$ oraz, że $y_p=1$ dla wszystkich pozostałych węzłów $p_j = 0$.

Założenie to zakłada, że ilość wyprodukowanego produktu w węźle końcowym (p) równa jest 1, a w pozostałych węzłach na poziomie innym niż poziom węzła końcowego ilości wyprodukowanych półproduktów są równe zeru. Krok iteracyjny i jest związany z poziomem wykonawczym, a więc każda następną iteracja będzie dotyczyła innego poziomu wykonawczego.

(2) – Dla każdego węzła $k \in W_i$ określany jest zbiór jego poprzedników V_k. Jeśli dla żadnego k nie istnieje zbiór poprzedników, postępowanie iteracyjne kończy się.

[20] Postępowanie algorytmiczne Gozinto oraz sposób oznaczeń pomocniczych przyjęto za St. Krawczykiem, *Metody ilościowe w logistyce (przedsiębiorstwa*). Wydawnictwo C.H. Beck. Warszawa 2001.

(3) – Węzły wchodzące w skład zbiorów poprzedników V_k (węzły poziomu $i+1$ grupujemy w zbiór W_{k+1}.

(4) – Rozpatrujemy kolejno zbiory V_k na poziomie W_{i+1}. Jeśli znany zapotrzebowanie wewnętrzne y_k na półprodukt wykonany w węźle k, to dla każdego j–tego węzła w_j takiego, że $w_j \in V_k$ zapotrzebowanie y_j wyniesie:

$$y_j = a_{jk} \cdot y_k$$

Po rozpatrzeniu wszystkich węzłów zbioru W_{i+1} przechodzimy do iteracji $i+1$.

(5) – Jeżeli w zbiorze węzłów na poziomie W_i występuje zapotrzebowanie na te same elementy w więcej niż jednym węźle zbioru W_{i+1} wówczas zapotrzebowanie wewnętrzne w węźle j wyznaczymy jako sumę:

$$y_j = \sum_{k^* \subseteq V_i^*} a_{jk^*} \cdot y_{k^*}$$

gdzie V_i^* – podzbiór węzłów w poziomie i, które w procesie produkcji występują w więcej niż jednym węźle ze zbioru W_{i+1}.

Realizacje tego postępowania przedstawimy na przykładzie produktu PF – 0 (rys. 109). Zgodnie z pierwszym krokiem postępowania przyjmujemy, $W_0 = \{PF\text{-}0\}$ i $y_{PF\text{-}0} = 1$. Dla pozostałych węzłów grafu, na tym etapie postępowania zakładamy, że $y_j = 0$.

Iteracja i = 0

$V_{PH-0} = \{PP-I_1, PP-I_2\}$ oraz $y_{PF-0} = 1$

$W_1 = (PP-I_1, PP-I_2\}$

Korzystając z etykiet odpowiednich krawędzi drzewa, obliczmy kolejno:

$y_{PP-1_1} \rightarrow 2 \cdot 1 = 2$

$y_{PP-1_2} \rightarrow 3 \cdot 1 = 3$.

Rozpatrzone zostały wszystkie węzły poziomu 0, zatem przechodzimy do następnej iteracji.

Iteracja i = 1

$V_{PP-I_1} = \{PP-II_1, PP-II_2, S_{n-1}\}$ oraz $y_{PP-I_1} = 2$

$V_{PP-I_2} = \{PP-II_3, PP-II_4, S_n\}$ oraz $y_{PP-I_2} = 3$

$V_{S_{n-1}} = 0$

$V_{S_n} = 0$

$W_2 = \{PP-II_1, PP-II_2, PP-II_3, PP=II_4, S_{n-1,}, S_n\}$

Dla węzłów zbioru : $V_{PP-I_1} = \{PP-II_1, PP-II_2, S_{n-1}\}$ otrzymujemy:

$y_{PP-II_1} \to 3 \cdot 2 = 6$

$y_{PP-II_2} \to 2 \cdot 2 = 4$

$y_{S_{n-1}} \to 2 \cdot 2 = 4$

Dla węzłów zbioru : $V_{PP-I_2} = \{PP-II_3, PP-II_4, S_n\}$ otrzymujemy:

$y_{PP-II_3} \to 0 + 2 \cdot 3 = 6$

$y_{PP-II_4} \to 0 + 1 \cdot 3 = 3$

$y_{S_n} \to 4 \cdot 3 = 12.$

Rozpatrzone zostały wszystkie węzły poziomu *i=1* mające poprzedników, zatem przechodzimy do następnej iteracji;

Iteracja i = 2

$V_{PP-II_1} = \{S_1, S_2, S_3\}$; $y_{PP-II_1} = 6$

$V_{PP-II_2} = \{S_2, S_4\}$; $y_{PP-II_2} = 4$

$V_{PP-II_3} = \{S_2, S_4, S_5, S_6, S_7\}$; $y_{PP-II_3} = 6$

$V_{PP-II_4} = \{S_6, S_7\}$; $y_{PP-II_4} = 3$

$V_{S_1} = 0;$ $V_{S_2} = 0;$ $V_{S_3} = 0;$

$V_{S_4} = 0;$ $V_{S_5} = 0;$ $V_{S_6} = 0;$

$V_{S_7} = 0$

$W_3 = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$

Zatem dla węzłów zbioru $V_{PP-II_1} = \{S_1, S_2, S_3\}$ mamy:

$y_{S_1} \to 2 \cdot 6 = 12$

$y_{S_2} \to 4 \cdot 6 = 24$

$y_{S_3} \to 6 \cdot 2 = 12$

dla węzłów zbioru $V_{PP-II_2} = \{S_2, S_4\}$ mamy:

$y_{S_2} \to 12 \cdot 4 = 48$

$y_{S_4} \to 12 \cdot 4 = 48$

dla węzłów zbioru $V_{PP-II_3} = \{S_2, S_4, S_5, S_6, S_7\}$ mamy:

$$y_{S_2} \rightarrow 22 \cdot 6 = 132$$
$$y_{S_4} \rightarrow 20 \cdot 6 = 120$$
$$y_{S_5} \rightarrow 6 \cdot 6 = 36$$
$$y_{S_6} \rightarrow 5 \cdot 6 = 30$$
$$y_{S_7} \rightarrow 4 \cdot 6 = 24$$

dla węzłów zbioru $V_{PP-II_4} = \{S_6, S_7\}$ mamy:

$$y_{S_6} \rightarrow 4 \cdot 3 = 12$$
$$y_{S_7} \rightarrow 4 \cdot 3 = 12.$$

Rozpatrzone zostały wszystkie węzły poziomu 2, mające swoich poprzedników, możemy zatem przejść do następnej iteracji.

Iteracja i = 3

Żaden z węzłów zbioru $W_n = \{S_1, S_2, ...S_7\}$ nie ma następników, zatem postępowanie iteracyjne możemy uznać za zakończone.

Ponieważ jednak zapotrzebowanie na niektóre surowce S_k można zaobserwować w więcej niż jednym węźle poziomu ***2,*** zatem łączne zapotrzebowanie na te surowce jest sumą zapotrzebowania we wszystkich węzłach, w których to zapotrzebowanie występuje.

Tabela 25. Lista materiałowa dla produktu PF-0

Symbol	Jednostka	Ilość
PF-0	szt.	1
PP-I_1	szt.	2
PP-I_2	szt.	3
PP-II_1	szt.	6
PP-II_2	szt.	4
PP-II_3	szt.	6
PP-II_4	szt.	3
S_1	szt.	12
S_2	szt.	204
S_3	szt.	12
S_4	szt.	168
S_5	szt.	5
S_6	szt.	42
S_7	szt.	36
S_{n-1}	szt.	4
S_n	szt.	12

11.2. KONSTRUKCJA DRZEWA PRODUKTU – GRAF GOZINTO

W celu zobrazowania zasad konstrukcji grafu Gozinto oraz budowania listy materiałów koniecznych do zrealizowania zamówień na produkty gotowe oraz półprodukty, prześledźmy realny proces produkcyjny realizowany w Zakładzie Mieszanek Paszowych na przykładzie produkcji pasz dla gołębi hodowlanych.

Zakład Mieszanek Paszowych zajmujący się przygotowaniem i sprzedażą mieszanek paszowych dla zwierząt użytkowych (gołębi hodowlanych) produkuje trzy rodzaje gotowych mieszanek: (**MM**) mieszanka paszowa dla młodych ptaków, (**MD**) mieszanka paszowa dietetyczna oraz (**ME**) mieszanka paszowa energetyczna dla ptaków wykonujących dalekie loty. Bazę surowcową (**Si**) do produkcji stanowią ziarna różnych gatunków roślin. Produkcja polega na wymieszaniu od kilku do kilkunastu gatunków nasion, odpowiednio spreparowanych i przygotowanych według specjalistycznych receptur.

Technologia przygotowania mieszanek gotowych wymaga produkcji dwuetapowej. W pierwszej fazie przygotowywane są półprodukty o symbolach handlowych: (**RL**), (**BP**), (**BK**), (**W**), (**R+M**), które po przejściu procesu leżakowania, w różnych proporcjach stanowią podstawę do produkcji wyrobów finalnych oraz mogą również być przedmiotem sprzedaży dla hodowców jako półprodukt do bezpośredniego skarmiania ptaków.

Jak łatwo zauważyć, przedstawiony proces produkcyjny jest procesem złożonym drugiego typu (rys. 110). Wejście do takiego procesu stanowi baza surowcowa (zestaw kilkunastu gatunków nasion różnych roślin paszowych), natomiast wyjściem są trzy produkty finalne – mieszanki (**MM**), (**MD**) i (**ME**).

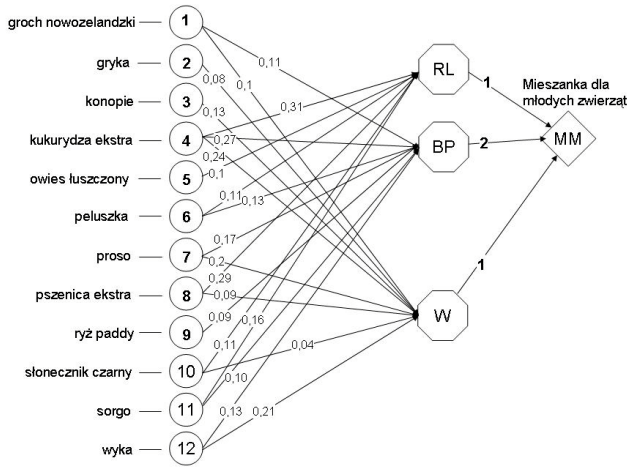
Proces technologiczny produkcji mieszanek obrazują tabele; tabela 26 zawierająca zestawienie surowców do wyrobu półproduktów oraz tabela 27 – zestawienie wytworzonych półproduktów użytych do produkcji wyrobów gotowych mieszanek paszowych.

Tabela 26. Zestawienie surowców użytych do wyrobu mieszanek specjalistycznych (półproduktów)

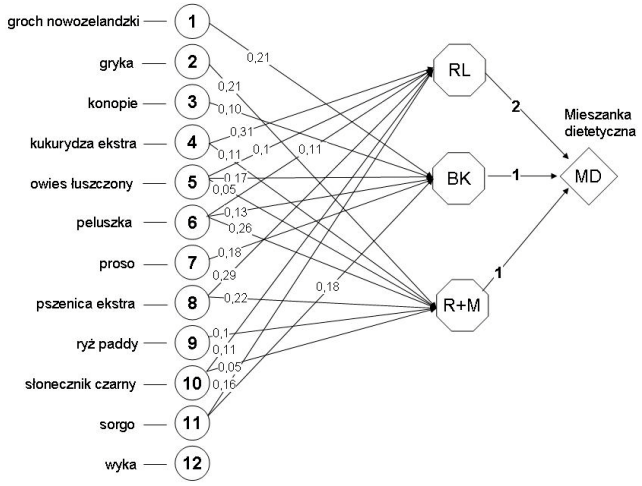
Lp.	Rodzaj surowca	Jedn.	Symbol	Mieszanki specjalne półprodukty				
				RL	BP	BK	W	R+M
1	groch nowozelandzki	kg	S_1	0,00	0,11	0,21	0,01	0,00
2	gryka	kg	S_2	0,00	0,00	0,00	0,08	0,21
3	konopie	kg	S_3	0,00	0,00	0,10	0,13	0,00
4	kukurydza ekstra	kg	S_4	0,31	0,27	0,00	0,24	0,11
5	owies łuszczony	kg	S_5	0,01	0,00	0,17	0,00	0,05
6	peluszka	kg	S_6	0,11	0,13	0,16	0,00	0,26
7	proso	kg	S_7	0,00	0,17	0,18	0,20	0,00
8	pszenica ekstra	kg	S_8	0,29	0,00	0,00	0,09	0,22
9	ryż paddy	kg	S_9	0,00	0,09	0,00	0,00	0,10
10	słonecznik czarny	kg	S_{10}	0,11	0,00	0,00	0,04	0,05
11	sorgo	kg	S_{11}	0,16	0,10	0,18	0,00	0,00
12	wyka	kg	S_{12}	0,00	0,13	0,00	0,21	0,00

Tabela 27. Zestawienie półproduktów do wyrobu produktów finalnych (gotowych mieszanek paszowych)

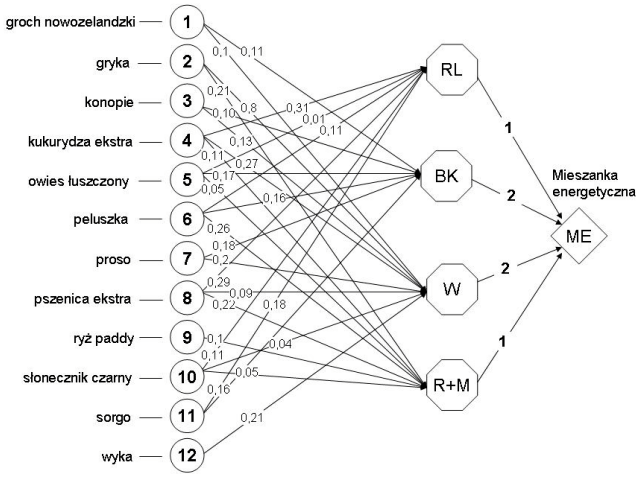
Lp	Półprodukty	Produkty finalne		
		MM	MD	ME
1	RL	1,00	2,00	1,00
2	BP	2,00	0,00	0,00
3	BK	0,00	1,00	2,00
4	W	1,00	0,00	2,00
5	R+M	0,00	2,00	1,00



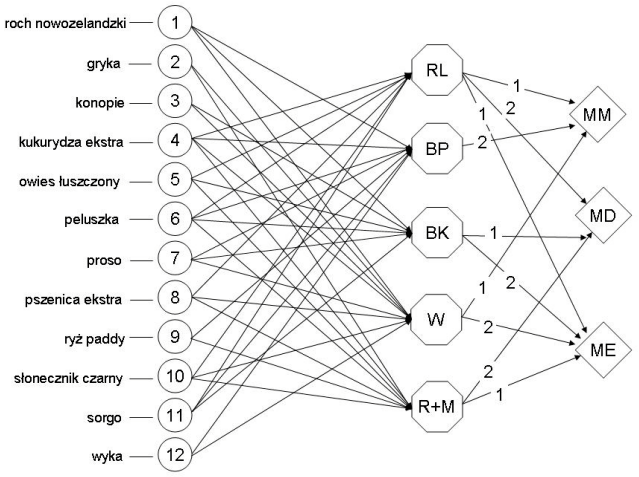
Rysunek 110. Graf Gozinto dla półproduktu MM – mieszanki dla młodych zwierząt



Rysunek 111. Graf Gozinto dla półproduktu MD – mieszanki dietetycznej



Rysunek 112. Graf Gozinto dla półproduktu ME – mieszanki energetycznej



Rysunek 113. Schemat przepływów surowcowych przy produkcji mieszanek paszowych – graf Gozinto

Dla przedstawionej w formie grafów Gozinto struktury procesu produkcyjnego mieszanek paszowych należy wyznaczyć zaopatrzenie w surowce do utrzymania produkcji przez okres 8 tygodni przy zapotrzebowaniu określonym harmonogramem zamówień na wyroby finalne (**MM**, **MD** i **ME**) oraz prognozą popytu na mieszki specjalistyczne (półsurowce **RL**, **BP**, **BK**, **W**, **R+M**). Zestawienie wielkości zamówień i prognoz popytu na wyroby finalne i półprodukty przedstawia tabela 28.

Tabela 28. Zestawienie wielkości zamówień i prognoz popytu na wyroby finalne i półprodukty

Mieszanki	zapotrzebowanie tygodniowe							
	1 tydz.	2 tydz.	3 tydz.	4 tydz.	5 tydz.	6 tydz.	7 tydz.	8 tydz.
RL	12,0	10,0	5,0	9,0	11,0	20,0	14,0	6,0
BP	11,0	15,0	8,0	4,0	12,0	15,0	6,0	15,0
BK	6,0	14,0	7,0	8,0	9,0	14,0	7,0	14,0
W	5,0	2,0	5,0	8,0	8,0	12,0	15,0	12,0
R+M	8,0	5,0	7,0	12,0	10,0	12,0	5,0	10,0
MM	70,0	75,0	25,0	95,0	85,0	90,0	80,0	95,0
MD	120,0	130,0	60,0	150,0	150,0	120,0	145,0	135,0
ME	180,0	220,0	120,0	180,0	175,0	150,0	152,0	165,0

11.3. POSTĘPOWANIE ALGEBRAICZNE GOZINTO

Przyjmując wprowadzone już oznaczenia, możemy stwierdzić, że sumaryczne zapotrzebowanie na surowce i półprodukty w dowolnym węźle grafu $k \in V$ a wytworzone w węzłach poprzednich (r_k) składa się z zapotrzebowania wewnętrznego (y_k) takiego, które będzie wykorzystywane w dalszych etapach produkcji oraz zapotrzebowania zewnętrznego (d_k), które w postaci półproduktu w wyniku realizacji zamówień zewnętrznych od klientów będzie odsprzedawane. Można zatem zapisać wzorem:

$$r_k = y_k + d_k.$$

Uwzględniając przedstawioną równość dla wszystkich węzłów grafu *Gozinto*, otrzymujemy układ, który zgodnie z zapisem macierzowym, możemy przedstawić jako równanie wektorowe:

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} + \mathbf{d}$$

gdzie:

– wektor **r** przedstawia wytwarzaną produkcję na poszczególnych stanowiskach,

– wektor **y** przedstawia wielkości produkcji kierowane do dalszego przetwarzania na innych stanowiskach,

– wektor **d** przedstawia ile i jakich wyrobów, a więc półproduktów i produktów końcowych jest wytworzonych dla klientów.

Przy znanym zapotrzebowaniu na produkcję wyrobów finalnych lub półproduktów wytworzonych w dowolnych węzłach, a więc gdy znany jest wektor **d**, poszukiwanymi wielkościami są wektory **r** i **y**.

Możemy zatem przedstawić wektor **y** jako funkcję wektora **r**:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$$

gdzie:

A jest macierzą incydencji zapisana na podstawie grafu Gozinto:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{d}.$$

Jest to równanie wektorowe, w którym znamy wektor zamówień **d** oraz macierz incydencji **A**, a nie znamy wektora zapotrzebowania sumarycznego **r**.

Możemy również zapisać, zgodnie z zasadami rachunku wektorowego, że:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{d}.$$

Występująca w równaniu macierz **I** oznacza macierz jednostkową. Ponieważ w macierzy **A** na głównej przekątnej występują same zera macierz jednostkowa ma na głównej przekątnej same jedynki. W wyniku wykonania działania odejmowania otrzymamy macierz z wartościami dodatnimi (jedynki) na swojej głównej przekątnej. Jest to gwarancją istnienia macierzy odwrotnej.

W celu skrócenia zapisu wprowadźmy:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

Po wprowadzeniu tego uproszczenia wektor **r** możemy zapisać w postaci:

$$\mathbf{r} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{d}.$$

Macierz **V** jest w prawdzie macierzą powstałą w wyniku przekształceń na macierzach, lecz ma również swoją praktyczna interpretację.

– element v_{jk} macierzy określa ile jednostek wyrobu z węzła *j* potrzeba do wyprodukowania 1 jednostki wyrobu w węźle *k*;

– w macierzy **V** otrzymujemy elementy różne od zera dla każdej pary węzłów, dla której następuje bezpośredni lub pośredni przepływ materiałów;

– dokonując mnożenia macierzy **V** przez wektor zapotrzebowania zewnętrznego **d**, otrzymujemy poszukiwany wynik, jakim jest łączne zapotrzebowanie na wszystkie wyroby, a więc półprodukty i surowce niezbędne do wykonania zamówienia;

– elementy macierzy **V** są określone przez technologię wytwarzania produktu finalnego i mogą być wyznaczane niezależnie od przewidywanej sprzedaży;

– składowe wektora **d** są określane na podstawie informacji o przewidywanej sprzedaży.

Macierz incydencji **A** sporządzoną na podstawie grafu Gozinto (rys. 113) przedstawia tabela 29.

Ostatecznie, mnożąc macierz **V** przez kolejne wektory zapotrzebowania **d** (tab. 28) otrzymujemy wymaganą wielkość zapotrzebowania na surowce i półprodukty w kolejnych tygodniach.

Tabela 32 przedstawia wyliczone zapotrzebowanie na surowce, półprodukty i gotowe mieszanki w poszczególnych ośmiu tygodniach.

Tabela 29. Macierz produktu **A** $[a_{ij}]$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{12}	S_{12}	RL	BP	BK	W	R+M	MM	MD	ME
S_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,11	0,21	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
S_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,08	0,21	0,00	0,00	0,00
S_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,10	0,13	0,00	0,00	0,00	0,00
S_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,31	0,27	0,00	0,24	0,11	0,00	0,00	0,00
S_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,01	0,00	0,17	0,00	0.05	0,00	0,00	0,00
S_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,11	0,13	0,16	0,00	0,26	0,00	0,00	0,00
S_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.00	0,17	0,18	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00
S_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,29	0,00	0,00	0,09	0,22	0,00	0,00	0,00
S_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0.09	0,00	0,00	0,10	0,00	0,00	0,00
S_{19}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,11	0,00	0,00	0,04	0,05	0,00	0,00	0,00
S_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,16	0,10	0,18	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,13	0,00	0,21	0,00	0,00	0,00	0,00
RL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	2,00	1,00
BP	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,00	0,00	0,00
BK	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	2,00
W	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	2,00
R+M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,00	1,00
MM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
MD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
ME	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela 30. Macierz (**I – A**)

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{12}	S_{12}	RL	BP	BK	W	R+M	MM	MD	ME
S_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	-0,11	-0,21	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
S_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	-0,08	-0,21	0,00	0,00	0,00
S_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	-0,10	-0,13	0,00	0,00	0,00	0,00
S_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,31	-0,27	0,00	-0,24	-0,11	0,00	0,00	0,00
S_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0,01	0,00	-0,17	0,00	-0.05	0,00	0,00	0,00
S_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-0,11	-0,13	-0,16	0,00	-0,26	0,00	0,00	0,00
S_7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0.00	-0,17	-0,18	-0,20	0,00	0,00	0,00	0,00
S_8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-0,29	0,00	0,00	-0,09	-0,22	0,00	0,00	0,00
S_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0,00	-0.09	0,00	0,00	-0,10	0,00	0,00	0,00
S_{19}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0,11	0,00	0,00	-0,04	-0,05	0,00	0,00	0,00
S_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-0,16	0,10	-0,18	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,00	-0,13	0,00	-0,21	0,00	0,00	0,00	0,00
RL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,00	-2,00	-1,00
BP	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	-2,00	0,00	0,00
BK	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	-1,00	-2,00
W	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	-1,00	0,00	-2,00
R+M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	-2,00	-1,00
MM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
MD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00
ME	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00

Tabela 31. Macierz $\mathbf{V} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{12}	S_{12}	RL	BP	BK	W	R+M	MM	MD	ME
S_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,11	0,21	0,01	0,00	0,24	0,21	0,45
S_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,08	0,21	0,08	0,42	0,37
S_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,10	0,13	0,00	0,13	0,10	0,46
S_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,31	0,27	0,00	0,24	0,11	1,09	0,84	0,90
S_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0,01	0,00	0,17	0,00	0.05	0,01	0,30	0,40
S_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0,11	0,13	0,16	0,00	0,26	0,37	0,90	0,69
S_7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0.00	0,17	0,18	0,20	0,00	0,54	0,18	0,76
S_8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0,29	0,00	0,00	0,09	0,22	0,38	1,02	0,69
S_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0,00	0.09	0,00	0,00	0,10	0,18	0,20	0,10
S_{19}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0,11	0,00	0,00	0,04	0,05	0,15	0,33	0,24
S_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0,16	0,10	0,18	0,00	0,00	0,36	0,50	0,52
S_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,00	0,13	0,00	0,21	0,00	0,46	0,00	0,42
RL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	2,00	1,00
BP	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	2,00	0,00	0,00
BK	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	2,00
W	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	2,00
R+M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	2,00	1,00
MM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
MD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00
ME	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00

Tabela 32. Zapotrzebowanie na surowce, półprodukty, gotowe mieszanki

Mieszanki	zapotrzebowanie tygodniowe							
	1 tydz.	2 tydz.	3 tydz.	4 tydz.	5 tydz.	6 tydz.	7 tydz.	8 tydz.
S_1	123	149	74	135	131	117	118	128
S_2	125	146	73	140	137	117	126	128
S_3	105	129	66	112	108	96	97	105
S_4	348	404	191	399	386	348	356	375
S_5	109	132	67	119	116	99	105	109
S_6	264	309	151	300	294	254	270	278
S_7	200	243	119	219	211	192	190	208
S_8	279	323	157	319	312	270	290	293
S_9	56	64	30	67	65	58	60	63
S_{10}	94	109	53	107	105	91	97	99
S_{11}	183	216	104	206	201	178	184	192
S_{12}	111	133	64	122	117	110	105	118
RL	502	573	270	584	571	500	536	536
BP	151	165	58	194	182	195	166	205
BK	486	600	307	518	509	434	456	479
W	435	533	270	463	443	402	399	437
R+M	428	493	247	492	485	402	447	445
MM	70	75	25	95	85	90	80	95
MD	120	130	60	150	150	120	145	135
ME	180	220	120	180	175	150	152	165

12. SZTUCZNE SIECI NEURONOWE

Rozdział ten jest poświęcony sztucznym sieciom neuronowym – ciekawym i wielce obiecującym systemom przetwarzania informacji w celu podejmowania decyzji. Zainteresowanie sieciami wynika m.in. z faktu, że dostosowanie sieci do wykonania określonego zadania odbywa się zazwyczaj poprzez uczenie jej, przez użycie zestawu pobudzeń i odpowiadających im reakcji, a nie przez specjalne algorytmy, programy itp. Mówiąc o sieciach neuronowych, często zamiennie używamy nazwy *neurokomputery,* mając na myśli urządzenia, których budowa podobna jest do biologicznej struktury mózgu ludzkiego, bądź która działa tak jak działałby mózg.

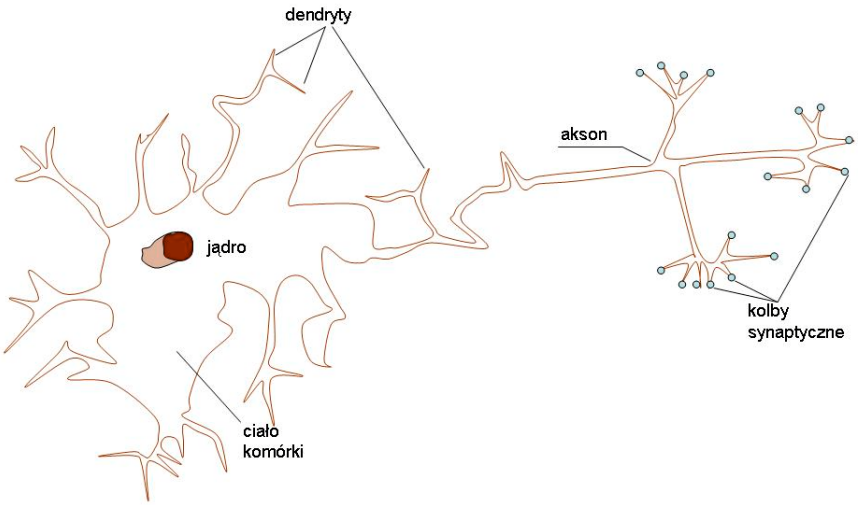
Dzisiejsze, tak szerokie i powszechne zainteresowanie sieciami neuronowymi zarówno wśród inżynierów, przedstawicieli nauk ścisłych – matematyki i fizyki oraz biologów czy neurofizjologów wynika przede wszystkim z poszukiwań sposobów budowy bardziej efektywnych i bardziej niezawodnych urządzeń do przetwarzania informacji, a układ nerwowy jest tutaj niedościgłym wzorem. Mózg człowieka ciągle jest najpotężniejszym z istniejących obecnie urządzeń liczących do celów przetwarzania informacji w czasie rzeczywistym. Fascynacje mózgiem, jego własnościami (odpornością na uszkodzenia, równoległym przetwarzaniem itp.) już w latach 40. zaowocowały pracami, których fundamentalne znaczenie odczuwamy jeszcze dzisiaj

12.1. GENEZA I BIOLOGICZNE PODSTAWY SZTUCZNYCH SIECI NEURONOWYCH

Sztuczne sieci neuronowe (ang. *artificial neural networks*) mają zdolność posługiwania się wiedzą zbliżoną do stosowanej przez istoty ludzkie oraz adaptacji tej wiedzy na podstawie bodźców (danych) od otoczenia. Mają one swoje korzenie w wielu dyscyplinach naukowych, takich jak cybernetyka, sztuczna inteligencja (ang. *artificial intelligence*), teoria zbiorów rozmytych (ang. *fuzzy sets theory*), teoria grupowania danych, rozpoznawanie obrazów, czy metody optymalizacji, a przede wszystkim nauki biologiczne z medycyną i neurologią na czele. Sieci te umożliwiają rozwiązywanie problemów dotyczących podejmowania decyzji, modelowania rzeczywistości, sterowania procesami, prognozowania, klasyfikacji obiektów na podstawie niepełnych i nieprecyzyjnych danych. Istoty ludzkie przy wykonywaniu powyższych zadań wykorzystują swoją inteligencję. Inteligencja sieci neuronowych rozwija się przez wykonywanie obliczeń, a w związku z tym mówimy o tzw. inteligencji obliczeniowej (ang. *computational intelligence*,). Systemy oparte na sztucznych sieciach neurono-

wych mają zdolność uczenia się, podobnie jak ich odpowiedniki biologiczne lub szerzej jak istoty inteligentne.

Sztuczne sieci neuronowe są systemami, których struktura jest w mniejszym lub większym stopniu wzorowana na działaniu ludzkiego systemu nerwowego i mózgu. Podstawową jednostką funkcjonalną tego systemu, zwanego *biologiczną siecią neuronową*, jest *komórka nerwowa* lub *neuron*. W uproszczeniu możemy powiedzieć, że system nerwowy odbiera zmiany zachodzące zarówno w środowisku zewnętrznym, jak i wewnątrz organizmu, przewodzi je i przetwarza w celu wypracowania odpowiednich reakcji. Przez odpowiednią reakcję rozumiemy taką, która pozwala organizmowi przeżyć i zachować *homeostazę*, czyli to zdolność organizmu do utrzymania stałych parametrów środowiska wewnętrznego organizmu, na przykład temperatury, objętości płynów, mimo zmieniających się warunków otoczenia. Za odbieranie bodźców są odpowiedzialne wyspecjalizowane narządy zmysłów, które możemy podzielić na *exteroreceptory* odbierające sygnały z otoczenia organizmu, *proprioceptory* podające informację o położeniu różnych części ciała i wreszcie *interoreceptory*. które wykrywają zmiany zachodzące wewnątrz organizmu. W zależności od typu odbieranych bodźców mamy *chemoreceptory*, *mechanoreceptory*, *termoreceptory*. *elektroreceptory* i *fotoreceptory* ipt. Bodźce odbierane z narządów zmysłów są przewodzone do ośrodkowego układu za pomocą neuronów czuciowych. Na podstawie doprowadzonych do ośrodkowego układu nerwowego informacji są podejmowane decyzje dotyczące reakcji na odebrane bodźce. Decyzje te są przekazywane do efektorów za pomocą neuronów ruchowych. Przykładem efektorów mogą być mięśnie lub gruczoły wydalania wewnętrznego. Typowy neuron jest przedstawiony na rysunku 114.



Rysunek 114. Typowa komórka nerwowa – neuron

Największą częścią neuronu jest zbudowane z cytoplazmy, jądra i organelli ciało komórki. Od ciała komórki odchodzą dwa typy wypustek cytoplazmatycznych, liczne dendryty oraz pojedynczy akson (neuryt). Dendryty i aksony uczestniczą w przekazywaniu impulsów elektrycznych o krótkim czasie trwania, zwanych impulsami nerwowymi. Dendryty są rozgałęzionymi włóknami wyspecjalizowanymi w odbieraniu bodźców od innych neuronów lub narządów zmysłu i przekazywania ich do ciała komórki. Akson przewodzi impulsy nerwowe z ciała komórki do innych neuronów lub efektorów. Akson, którego długość może przekraczać jeden metr, ma zazwyczaj odgałęzienia boczne, co umożliwia przekazywanie pobudzeń do wielu innych neuronów. Zakończeniami aksonów są tzw. kolby synaptyczne, które uwalniając związki chemiczne zwane *neurotransmiterami* przekazują pobudzenia do sąsiednich neuronów. Przekazywanie informacji między neuronami odbywa się przez przewodzenie synaptyczne. Jeżeli szerokość szczeliny synaptycznej jest mniejsza niż dwa nanometry, to synapsę taką nazywamy elektryczną. W tym przypadku impuls nerwowy jest przekazany przez przewodzenie elektryczne z jednej komórki do drugiej. Jeżeli szerokość szczeliny synaptycznej wynosi około 20 nm, to przekazywanie pobudzeń odbywa się na drodze chemicznej. Sygnały wysyłane w ten sposób mogą zarówno pobudzać, jak i hamować aktywność sąsiednich komórek nerwowych.

W sztucznej sieci, poszczególne neurony mogą pełnić jedną z trzech ról:

– neuronu wejściowego, który pobiera informacje wejściowe z zewnętrznego środowiska;

– neuronu ukrytego (wewnętrznego), który stanowi pośrednie ogniwo na drodze kolejnych przekształceń przenoszonych sygnałów;

– neuronu wyjściowego, który stanowi wyprowadzenie sygnału odzwierciedlającego rezultat przetwarzania dokonanego przez sieć.

Mimo że zasada działania pojedynczego neuronu jest bardzo prosta, to – dzięki występowaniu ich w dużej liczbie i we wzajemnych połączeniach – zorganizowana sieć neuronów jest w stanie odzwierciedlać pewną wiedzę i generować zadowalające rozwiązania postawionych zadań. W odróżnieniu od klasycznego sposobu przetwarzania informacji, stosowanego we współczesnych komputerach, sieć neuronowa nie wymaga zaprogramowania algorytmu, który opisywałby krok po kroku kolejne czynności do wykonania, aby przekształcić dane wejściowe w oczekiwany rezultat – „wiedza" sieci o sposobie rozwiązywania zadania jest ukryta w jej strukturze, tj. w charakterystyce neuronów i połączeń, z których sieć się składa, a charakterystyka ta powstaje nie poprzez zaprogramowanie, lecz przez uczenie sieci.

12.2. MODELE NEURONU

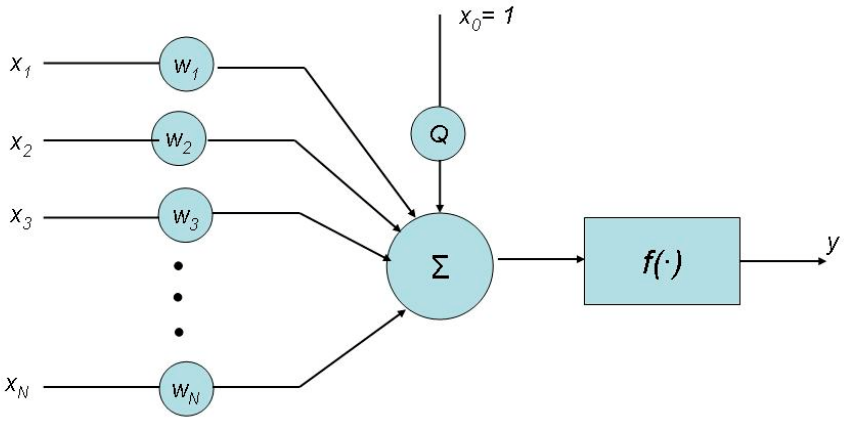
W 1943 roku W. McCulloch i W. Pitts, zainspirowani modelem biologicznym, przedstawili *model neuronu* jako układu z pewnym progiem wrażliwości. Układ ten ma dwa typy wejść: pobudzające i hamujące. Dodatkowo przyjęli założenia, że:

– aktywność neuronu jest procesem typu wszystko albo nic,

– opóźnienie w propagacji pobudzenia występuje jedynie w przewodzeniu synaptycznym,

– występowanie potencjału na którymkolwiek wejściu hamującym uniemożliwia aktywację neuronu,

– aby neuron był w stanie aktywnym, pewna ustalona liczba wejść pobudzających musi być w stanie aktywnym.



Rysunek 115. Model neuronu

Przedstawiony na rysunku 115 model neuronu, można opisać zależnością:

$$y = f(\sum_{j=1}^{N} w_{ij} x_j - \theta) \tag{78}$$

– gdzie $f(\cdot)$ jest funkcją aktywacji, współczynniki w_i są wagami połączeń synaptycznych a θ jest *progiem wrażliwości neuronu*.

Wyrażenie $\sum_{i=1}^{N} w_i x_i = z_i$ oznacza zagregowany sygnał wchodzący do i-tego neuronu.

Argument funkcji $f(\cdot)$ jest nazywany potencjałem aktywacji. Funkcja aktywacji może przyjmować różną postać:

– funkcja progowa o postaci:

$$y_i = f(z_i) = \begin{Bmatrix} 1, & gdy & z_i > 0 \\ 0, & gdy & z_i \le 0 \end{Bmatrix} \tag{79}$$

W takim przypadku neuron jest w stanie aktywnym, gdy suma ważona sygnałów wejściowych x_i jest większa lub równa wartości progu wrażliwości θ. W zależności od znaku wagi w_i odpowiadające jej wejście jest typu *pobudzającego* lub *hamującego*. Dla przedstawionej wyżej funkcji aktywacji neuron jest nazywany perceptronem. Ponieważ w tym przypadku na wyjściu neuronu mogą pojawiać się jedynie wartości 0 lub 1, mówimy, że neuron ten działa zgodnie z *zasadą wszystko albo nic*. W praktyce zazwyczaj stosuje się modele neuronu dopuszczające stany pośrednie, tj. należące do przedziału [0,1]. Przez analogię do wartości przyjmowanych przez funkcje przynależności neurony takie są nazywane niekiedy rozmytymi, a $f(x) \in [0,1]$ jest stopniem aktywacji neuronu.

– funkcja liniowa o postaci:

$$y_i = f(z_i) = z_i \tag{80}$$

– funkcja nieliniowa S – kształtna (sigmoidalna), np. logistyczna:

$$y_i = f(z_i) = \frac{1}{1+e^{-z_i}} \tag{81}$$

12.3. BUDOWA SIECI NEURONOWYCH

Z powodu dużej różnorodności stosowanych struktur sztucznych sieci neuronowych trudno jest podać jednolitą definicję, ale najpełniejsza wydaje się następująca. *Sieć neuronowa* jest układem złożonym z bardzo wielu prostych elementów, neuronów, działających w trybie równoległym i mającym naturalną zdolność uczenia się na podstawie przykładów oraz stosowania tak uzyskanej wiedzy do przyszłych nieznanych sytuacji. Wiedza jest gromadzona w wagach połączeń synaptycznych w_i. Sieci neuronowe charakteryzują następujące istotne cechy:

– *adaptacyjność*, to znaczy zdolność uczenia się przez dostosowanie parametrów i struktury sieci do zmian otoczenia;

– *uogólnianie*, czyli zdolność wypracowywania rozsądnych decyzji w sytuacjach, z którymi sieć nie miała dotychczas styczności;

– *równoległość obliczeń*, czyli w przeciwieństwie do komputera, gdzie instrukcje są wykonywane sekwencyjnie, w sieciach neuronowych obliczenia są

wykonywane jednocześnie przez dużą liczbę połączonych wzajemnie jednostek – neuronów;

– *nieliniowość*, rozumiana jako zdolność modelowania nieliniowych zależności wyjściowo-wejściowych przez sieć;

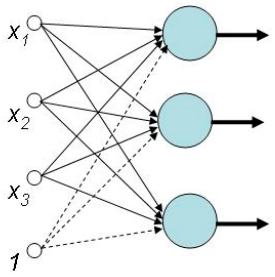
– *odporność na błędy*, czyli zdolność działania, mimo pewnych *us* oraz także zdolność uczenia się na podstawie danych błędnych, niepełnych, rozmytych i nieprecyzyjnych.

Ze względu na architekturę połączeń występujących między neuronami wyróżnia się następujące typy sieci neuronowych:

– jednowarstwowe,
– wielowarstwowe,
– rekurencyjne.

Podział na warstwy polega na pogrupowaniu neuronów w uporządkowane klasy w taki sposób, że do neuronów w danej klasie prowadzą połączenia wyłącznie od neuronów z wcześniejszych klas (warstw).

Najprostszym wariantem architektury sieci neuronowej, niemającej połączeń rekurencyjnych jest sieć jednowarstwowa. Przykładową strukturę takiej sieci przedstawia rysunek 116.



Rysunek 116. Przykładowa sieć neuronowa jednowarstwowa nierekurencyjna

Neurony, w których następuje przetwarzanie sygnałów, oznaczone są dużymi okręgami i tworzą warstwę neuronów. Komórki oznaczone okręgami mniejszymi formalnie są również neuronami, ale rola ich jest pasywna, gdyż jedynie wprowadzają one sygnały wejściowe do sieci, a nie przetwarzają ich i nie są traktowane jako warstwa sieci. Szczególnym przypadkiem jest pomocniczy neuron wejściowy oznaczony 1 – jest to tzw. wysyłający stale do połączonych z nim neuronów sygnał o sile 1. Dzięki obecności *bias* sieć ma możliwości dopasowywania swojego działania do oczekiwanych rezultatów. W większości przypadków stosowania sieci neuronowych bias jest uwzględniany w strukturze sieci, lecz – ze względu na swój pomocniczy charakter – nie bywa nawet uwidacznianym na schemacie.

Powyższa sieć neuronowa ma trzy wejścia (oraz bias) i trzy neurony wyjściowe. W przedstawionej sieci neurony wejściowe są połączone z neuronami wyjściowymi na zasadzie każdy z każdym — jest to podejście najczęściej stosowane, gdyż trudno z wyprzedzeniem przewidzieć, które połączenia w sieci będą potrzebne dla poprawnego jej działania, a które okażą się zbędne.

Każde połączenie ma wagę, której wartość jest ustalana w procesie uczenia sieci w taki sposób, aby kolejne przetworzenia sygnałów wejściowych dały w neuronach wyjściowych rezultaty możliwie jak najbliższe pożądanym wynikom. Łatwo zauważyć, że gdybyśmy rozpatrzyli sieć jednowarstwową z neuronami o liniowej funkcji aktywacji, to sygnał na i-tym neuronie wyjściowym będzie kombinacją liniową sygnałów wejściowych (z wyrazem wolnym), tj:

$$y_i = \left(\sum_{j=1}^{N-1} x_j w_{ij} \right) + w_{iN} \tag{82}$$

gdzie:

N – liczba neuronów wejściowych (z których N-1 to faktyczne sygnały wejściowe, a neuron N – to *bias*),

x_j – wartość sygnału na wejściu do j-tego neuronu,

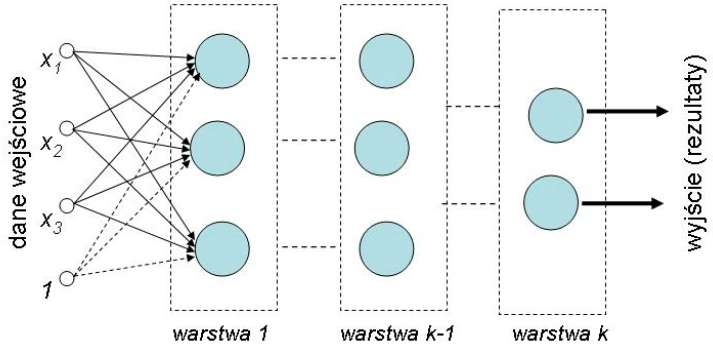
w_{ij} – waga połączenia między neuronem j a neuronem i.

Poszukiwanie takich wag w_{ij}, aby otrzymywane w wyniku działania sieci neuronowych wartości y_j były jak najbliższe pożądanym rezultatom, kojarzone może być z poszukiwaniem parametrów liniowej funkcji regresji w celu znalezienia wartości zmiennej zależnej. Skojarzenie to stanowi dobry punkt wyjścia do analizy potencjalnych możliwości wynikających z budowy sieci bardziej skomplikowanych, w których neurony będą posługiwały się funkcją aktywacji inną niż liniowa oraz będą zorganizowane w więcej niż jedną warstwę.

Do bardziej skomplikowanych problemów zastosowane będą więc sieci wielowarstwowe**.**

Schemat budowy wielowarstwowej sieci neuronowej o k-warstwach przedstawia rysunek 117.

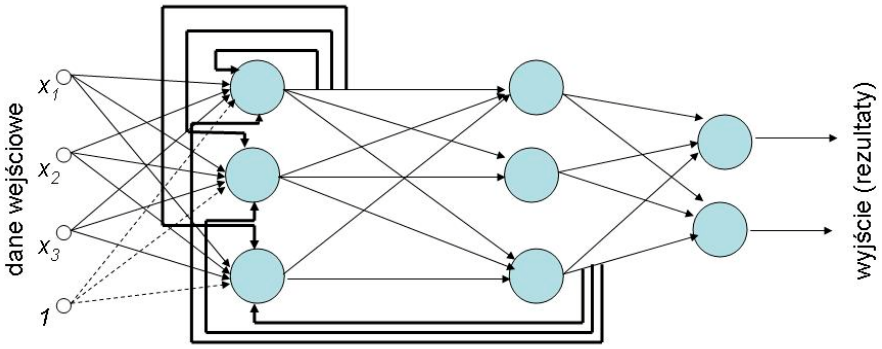
Na rysunku 117 jest przedstawiona ogólna struktura wielowarstwowych sieci neuronowych. W schemacie, oprócz neuronów wejściowych oraz warstwy neuronów wyjściowych, występuje również co najmniej jedna warstwa neuronów ukrytych. Zastosowanie warstwy lub warstw ukrytych oraz nieliniowej (np. S-kształtnej) funkcji aktywacji pozwala sieci lepiej prognozować wartości sygnałów na wyjściu. W szczególności przyjmuje się, że sieć z dwiema warstwami ukrytymi, składającymi się z neuronów o logistycznej funkcji aktywacji, jest w stanie dokonywać regresji nieliniowej odpowiadającej praktycznie dowolnej postaci funkcyjnej.



Rysunek 117. Schemat budowy sieci wielowarstwowej (o *k* warstwach)

Wszystkie rozpatrywane powyżej warianty opisywały sieci jednokierunkowe (*feedforward*), tzn. takie, gdzie neurony można było uszeregować w kolejności od „wcześniejszego" do „późniejszego", zgodnie z kierunkiem przebiegu sygnałów w sieci. Inaczej mówiąc, graf, którego wierzchołkami są występujące w sieci neurony, a łukami połączenia między nimi, miał właściwość *acykliczności*. Sieci neuronowe, opisane grafem pozbawionym tej właściwości, są nazywane **sieciami rekurencyjnymi**.

Ideę sieci rekurencyjnej ilustruje rysunek 118. Dla większej przejrzystości połączenia rekurencyjne zaznaczono liniami pogrubionymi.



Rysunek 118. Schemat budowy sieci rekurencyjnej

Sieci rekurencyjne stanowią kolejny krok w kierunku budowania architektur coraz wierniej odpowiadających prawdziwemu systemowi nerwowemu, pozwalających rozwiązywać bardziej skomplikowane problemy. Jednocześnie występowanie cyklicznych połączeń między neuronami wprowadza dodatkowe trudności w opisie i analizie sieci.

12.4. UCZENIE SIECI NEURONOWYCH

Tworzenie sieci neuronowej, która ma rozwiązywać zadany problem, sprowadza się do realizacji dwóch głównych etapów, tj.:

– określenia struktury sieci, tzn. liczby neuronów, ewentualnego ich podziału na warstwy, wyboru typu funkcji aktywacji dla poszczególnych neuronów;

– nauczenia sieci działania odpowiedniego dla rozwiązywanego problemu.

Pierwszy z tych etapów wymaga aktywnego i koncepcyjnego udziału użytkownika, a drugi – po określeniu stosownych założeń – jest realizowany automatycznie.

Rozróżnia się dwa typy uczenia sieci: z nauczycielem (*supervised learning*) oraz bez nauczyciela (*unsupervised learning*).

12.4.1. Uczenie sieci neuronowych z nauczycielem

Wagi przyporządkowane połączeniom między poszczególnymi neuronami muszą zostać ustalone w taki sposób, aby zminimalizować błąd na wyjściu sieci (różnicę między sygnałami generowanymi przez sieć a pożądanymi wartościami tych sygnałów). W tym celu należy zgromadzić możliwie duży zbiór danych wejściowych (zbiór uczący) dla zagadnienia, które sieć ma rozwiązywać, wraz z pożądanymi wartościami wyników (sygnałów na wyjściu sieci). Właściwe wartości wag są następnie wyznaczane przy użyciu odpowiedniego algorytmu po analizie zachowania sieci w poszczególnych przykładowych przypadkach ze zbioru uczącego. Podstawowym algorytmem poszukiwania właściwych wag jest *metoda spadku gradientu*.

Oznaczmy, dla przykładu w sieci jednowarstwowej jednokierunkowej przez K liczbę neuronów wejściowych, a prze L liczbę neuronów wyjściowych. Połączenie neuronów wejściowych z wyjściowymi jest realizowane na zasadzie każdy z każdym, czyli każdy neuron wejściowy jest połączony z każdym neuronem wyjściowym. Możemy zatem powiedzieć, że w takiej sieci występuje $K \times L$, z których każde połączenie ma swoją przypisaną wagę. Załóżmy ponadto, że neurony wyjściowe generują sygnały na wyjściu jako liniową kombinację sygnałów wejściowych – możemy zatem mówić o liniowej funkcji aktywacji neuronów wyjściowych.

Dla każdego przypadku ze zbioru uczącego mamy dane:

$\mathbf{x} = [x_i]_{K\times 1}$ – wektor sygnałów wejściowych,

$\mathbf{d} = [d_i]_{L\times 1}$ – wektor oczekiwanych wartości sygnałów wyjściowych.

Oznaczmy również przez $\mathbf{W}=[w_{ij}]_{L\times K}$ macierz wag połączeń. Dla przyjętych wartości wag sygnały na wyjściu z sieci będą obliczane według wzoru:

$$y_i = \sum_{j=1}^{K} x_j w_{ij} \; ; \rightarrow \underset{i\in L}{\forall} \tag{83}$$

Jeśli zdefiniujemy zbiór sygnałów wyjściowych jako wektor $\mathbf{y} = [y_i]_{L\times 1}$ to możemy powyższe przedstawić w postaci rachunku macierzowego:

$$y = Wx.$$

Oznaczmy dalej przez E funkcję błędu sygnałów wyjściowych jako połowę sumy kwadratów różnic między pożądanymi a otrzymanymi wartościami sygnałów wyjściowych:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{L}(d_i - y_i)^2 \tag{84}$$

Przy tak zdefiniowanej funkcji błędu sieci neuronowej, wyznaczając pochodną tej funkcji, można zbadać wpływ wag poszczególnych połączeń na wartość błędu całej sieci, wyprowadzając:

$$\frac{\delta E}{\delta w_{ij}} = \frac{\delta E}{\delta y_i}\frac{\delta y_i}{\delta w_{ij}} = -(d_i - y_i)x_j \quad \text{dla} \quad i=1,2,3 \ldots L \quad \text{oraz} \quad j=1,2,3 \ldots K$$

Wartość obliczonej pochodnej stanowi oszacowanie przyrostu funkcji błędu w odpowiedzi na jednostkowy przyrost wartości wagi w_{ij}. Aby poprawić wartość błędu sieci neuronowej, należałoby do obecnej wartości w_{ij} dodać współczynnik błędu sieci dany zależnością:

$$\Delta w_{ij} = -\eta\frac{\delta E}{\delta w_{ij}} = \eta(d_i - y_i)x_j \tag{85}$$

gdzie η jest *współczynnikiem uczenia* określającym tempo modyfikowania wag połączeń.

Dochodzenie do optymalnej wartości wagi połączenia w metodzie spadku gradientu polega na krokowym zwiększaniu lub zmniejszaniu wagi w kierunku wskazywanym przez nachylenie krzywej błędu w danym punkcie. Współczynnik uczenia jest istotnym czynnikiem wpływającym na skuteczność uczenia sieci, decyduje bowiem o długości kroku w kierunku uzyskania oczekiwanej poprawy wag. Zbyt mała wartość współczynnika uczenia będzie skutkować bardzo wolnym dochodzeniem do optymalnych wartości wag, natomiast zbyt duża jego wartość może powodować brak zbieżności wag do optymalnych wartości.

Całościowy proces uczenia jednokierunkowej i jednowarstwowej sieci neuronowej można opisać za pomocą postępowania iteracyjnego:

Krok 1: Przyjmiemy losowo początkowe wartości wag połączeń.
Krok 2: Zerujemy współczynniki korekty wag dl wszystkich połączeń:

$$\Delta w_{ij} := 0 \quad \text{dla} \quad i = 1,2,3 \ldots L \quad \text{oraz} \quad j = 1,2,3 \ldots K.$$

Krok 3: Dla każdego zestawu danych wejściowych (dla każdej pary **x, d**):

– używając bieżących wag połączeń w sieci obliczamy wartości sygnałów wyjściowych $y_1, y_2, \ldots\ldots y_L$ otrzymane po wprowadzeniu wartości wektora **x** jako sygnałów wejściowych do sieci neuronowej,

– dla każdego połączenia (*i-j*) powiększamy wartość Δw_{ij} o wielkość korekty wynikającej z błędu sieci neuronowej w rozpatrywanym zestawie danych wejściowych: $\Delta w_{ij} := \Delta w_{ij} + \eta(d_i - y_i)x_j$.

Krok 4: Dla każdego połączenia (*i-j*) wprowadzamy korektę wagi: $w_{ij} := w_{ij} + \Delta w_{ij}$.

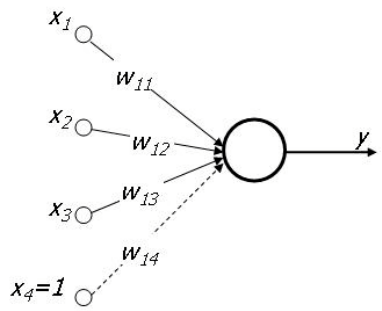
Krok 5: Gdy nie osiągnęliśmy satysfakcjonującego wyniku powracamy do kroku 2.

Postępowanie iteracyjne polegające na wykonaniu kroków 2–4 jest nazywane epoką (*epoch*). Proces uczenia trwa wiele epok i kończy się, gdy błędy popełniane przez sieć przestają ulegać zauważalnej poprawie lub, gdy występują oznaki przeuczenia sieci.

Przeanalizujmy teraz przebieg procesu uczenia prostej sieci jednowarstwowej przyjmującej trzy sygnały wejściowe (oraz bias) i mającej jedno wyjście (rys. 119) Dane są cztery przykładowe zestawy wartości sygnałów wejściowych wraz z odpowiadającymi im pożądanymi wartościami sygnału wyjściowego (tab. 34).

Tabela 33. Dane do procesu uczenia sieci neuronowej

Zestaw danych	Wejście			Wyjście
	x_1	x_2	x_3	d
1	3	3	2	8
2	1	3	4	6
3	- 4	2	5	- 11
4	0	2	2	- 1



Rysunek 119. Przykładowy schemat sieci neuronowej przyjętej do obliczeń

Tabela 34. Rezultaty wygenerowane przez sieć neuronową przy początkowymzestawie wag

Zestaw danych wyjściowych	Wygenerowany sygnał wyjściowy y	Błąd neuronu wyjściowego E
1	4,408	6,451
2	5,608	0,077
3	4,445	119,274
4	2,944	7,778
Przeciętna wartość błędu		33,395

Zgodnie z pierwszym krokiem przyjętego postępowania uczenia sieci neuronowej rozpoczynamy, przyjmując losowe wartości początkowe wag załóżmy, że otrzymane wartości to: $w_{11} = 0{,}299$, $w_{12} = 0{,}567$, $w_{13} = 0{,}899$, $w_{14} = 0{,}012$.

Dla powyższych wartości wag połączeń obliczamy – zgodnie ze wzorem (54) – sygnał na wyjściu sieci (y) oraz obliczamy – zgodnie ze wzorem (55) – wielkość błędu neuronu wyjściowego (E). W tabeli 35 zestawiono uzyskane wyniki wartości sygnału wyjściowego i wielkości błędu neuronu wyjściowego.

Wielkości korekt, obliczone zgodnie ze wzorem (56) dla każdej wagi oraz z uwzględnieniem każdego z zestawów danych uczących, zapisane zostały w tabeli 36. Wartość współczynnika uczenia przyjęto na poziomie $\eta = 0{,}01$.

Tabela 35. Wyniki obliczeń korekt wag sieci neuronowej

Waga	Wartość początkowa	Wielkość korekty					Wartość skorygowana
		zestaw 1	zestaw 2	zestaw 3	zestaw 4	łącznie	
w_{11}	0,299	0,108	0,004	0,618	0,000	0,729	1,028
w_{12}	0,567	0,108	0,012	-0,309	-0,079	-0,268	0,299
w_{13}	0,899	0,072	0,016	-0,772	-0,079	-0,764	0,135
w_{14}	0,012	0,036	0,004	-0,154	-0,039	-0,154	-0,142

Wyznaczone, nowe wartości skorygowane wag połączeń stanowią podstawę do obliczenia nowych wartości sygnałów wyjściowych generowanych przez sieć neuronową po pierwszej iteracji. Wyniki uzyskiwanych sygnałów i wielkości błędów zawarto w tabeli 37.

Tabela 36. Rezultaty generowane przez sieć po pierwszej korekcie wag

Zestaw danych wyjściowych	Wygenerowany sygnał wyjściowy y	Błąd neuronu wyjściowego E
1	9,25632	0,78917
2	2,68866	5,482486
3	0,94773	71,37413
4	-0,71025	0,041978
Przeciętna wartość błędu		19,42194

Można zauważyć, że przeciętna wielkość błędu neuronu wyjściowego uległa zmniejszeniu w porównaniu z przedstawioną w tabeli 35.

W rezultacie wielokrotnego powtarzania kroków 2–5 algorytmu wagi połączeń będą stopniowo korygowane w kierunku pozwalającym na redukcję błędu otrzymywanych sygnałów wyjściowych.

Przedstawiona metoda pozwala korygować wagi jedynie połączeń prowadzących do neuronów wyjściowych sieci, gdyż tylko dla nich są znane pożądane stany sygnałów, przez co możliwe jest porównanie bieżącego działania połączeń ze stanem, jaki należy uzyskać. W związku z tym metoda ta jest wystarczająca jedynie dla sieci jednowarstwowych. Uogólnieniem przedstawionego postępowania na przypadki sieci, które mogą zawierać również ukryte warstwy neuronów, jest **metoda wstecznej propagacji błędów** (*backpropagation*). Sieć neuronową wielowarstwową z warstwami ukrytymi przedstawia rysunek 117.

Przyjmijmy, że neurony w sieci są ponumerowane liczbami naturalnymi. Wprowadźmy oznaczenia:

$P^0(i)$ – zbiór neuronów poprzedzających neuron *i*, tzn. takich, z których sygnał jest przesyłany do neuronu *i*,

$P^*(i)$ – zbiór neuronów następujących po neuronie *i*, tzn. takich, do których jest wysyłany sygnał z neuronu *i*,

z_i – zagregowany sygnał wchodzący do neuronu *i*,

y_i – sygnał wychodzący z neuronu *i*,

$f(\cdot)_i$ – funkcja aktywacji neuronu *i*.

Dla neuronów wejściowych, czyli takich neuronów *i*, że $P^0(i) = \emptyset$, sygnał wchodzący do neuronu jest sygnałem wejściowym sieci. W pozostałych przypadkach, czyli dla neuronów należących do warstwy ukrytej lub wyjściowej, wartość z_i, jest obliczana jako ważona suma sygnałów wychodzących od neuronów je poprzedzających:

$$z_i = \sum_{j \in P^0(i)} y_i w_{ij} \tag{86}$$

Sygnał wychodzący z neuronu stanowi przekształcenie sygnału wchodzącego dokonane za pomocą funkcji aktywacji, tj.:

$$y_i = f(z_i) \tag{87}$$

Dla neuronów wejściowych funkcja aktywacji jest zawsze funkcją liniową ($f_i(x) = x$), a dla pozostałych neuronów może mieć postać dowolną, np. logistyczną.

Rozpatrzmy zatem sposób uczenia sieci wielowarstwowej poprzez korygowanie wag, podobnie jak w przedstawionym wcześniej sposobie korekcji wag dla sieci jednowarstwowych.

Podobnie jak poprzednio, dla każdego połączenia w sieci musimy wyznaczyć wartość pochodnej funkcji błędu sieci neuronowej względem wagi połączenia. Dla połączenia prowadzącego od neuronu *j* do neuronu *i* pochodna ma postać:

$$\frac{\delta E}{\delta w_{ij}} = \frac{\delta E}{\delta z_i}\frac{\delta z_i}{\delta w_{ij}} = \frac{\delta E}{\delta z_i} y_j \tag{88}$$

Jak można łatwo zauważyć, czynnik $\frac{\delta E}{\delta z_i}$ jest wspólny dla pochodnych względem wag każdego z połączeń prowadzących do *i* – tego neuronu. Czynnik ten nazywany jest **sygnałem błędu neuronu** *i*. Jest zwykle oznaczany symbolem δ_i:

$$\delta_i = \frac{\delta E}{\delta z_i} = \frac{\delta E}{\delta y_i}\frac{\delta y_i}{\delta z_i} = \frac{\delta E}{\delta y_I} f_i^{'}(z_i) \tag{89}$$

Wartość δ_i łatwo wyznaczyć, jeśli *i* jest neuronem wyjściowym w sieci. Otrzymujemy wtedy:

$$\delta_i = \frac{\delta E}{\delta z_i} = \frac{\delta E}{\delta y_I} f_i^{'}(z_i) = -(d_i - y_i) f_i^{'}(z_i) \tag{90}$$

Jeśli *i* należy do warstwy ukrytej, to δ_i wyznacza się na podstawie wartości sygnałów błędu wszystkich neuronów następujących po neuronie *i*:

$$\delta_i = \frac{\delta E}{\delta z_i} = \sum_{k \in P^s(i)} \delta_k w_{ki} f_i^{'}(z_i) \tag{91}$$

Powyższa formuła wyjaśnia nazwę metody – wsteczna propagacja błędu – wartości sygnałów błędów poszczególnych neuronów przekazywane są od warstwy wyjściowej do kolejnych warstw poprzedzających.

Do stosowania wzorów na wyznaczenie sygnału błędu neuronu konieczna jest znajomość pochodnej funkcji aktywacji.

Pochodne dla funkcji liniowej przyjmuje się w postaci $f'(z_k) = 1$;

a dla funkcji logistycznej $f^{'}(z_k) = f(z_k)(1 - f(z_k)) = y_k(1 - y_k)$.

Poniżej przedstawiono iteracyjną procedurę korekty wag połączeń w sieciach neuronowych wielowarstwowych następująco:

Krok 1: Przyjmujemy losowe wartości początkowe wag połączeń.
Krok 2: Zerujemy współczynniki korekty wag dla wszystkich połączeń:

$$\underset{i,j;j\in P^0(i)}{\forall} \Delta w_{ij} := 0$$

Krok 3: Dla każdego zestawu danych wejściowych (dla każdej pary **x**, **d**):
– używając bieżących wag połączeń w sieci, obliczamy wartości sygnałów wyjściowych otrzymane po wprowadzeniu wartości wektora **x** jako sygnałów wejściowych do sieci neuronowej,
– dla każdego neuronu wyjściowego obliczamy wartość sygnału błędu (δ) za pomocą wzoru (11.13), następnie dla neuronów w warstwach ukrytych. W kolejności od ostatniej do pierwszej, wyznacz wartości sygnału błędu, korzystając ze wzoru (62).
– dla każdego połączenia (*i–j*) powiększamy wartość Δw_{ij} o wielkość korekty wynikającej z błędu sieci neuronowej w rozpatrywanym zestawie danych wejściowych:

$$\Delta w_{ij} := \Delta w_{ij} - \eta \delta_i y_i .$$

Krok 4: Dla każdego połączenia (*i–j*) dokonujemy korekty wagi:

$$w_{ij} := +\Delta w_{ij} .$$

Krok 5: W przypadku nie uzyskania satysfakcjonującego wyniku – wracamy do kroku 2.

12.4.2. Uczenie sieci neuronowych bez nauczyciela

W odróżnieniu od omawianej powyżej sytuacji, gdzie sieć neuronowa była uczona właściwego zachowania poprzez analizę przykładowych danych wejściowych z odpowiadającymi im oczekiwanymi rezultatami, uczenie bez nauczyciela opiera się jedynie na przetwarzaniu przykładowych danych wejściowych bez wskazywania, jaka powinna być prawidłowa odpowiedź w danej sytuacji. Celem działania tak budowanej sieci jest rozpoznanie struktury danych, najczęściej w celu dokonania segmentacji obiektów podawanych na wejściu do sieci. Problem ten różni się od klasycznego zadania klasyfikacji, gdzie celem sieci neuronowej było nauczyć się określania z możliwie wysoką skutecznością, do której ze znanych kategorii dany obiekt – uwzględniając poszczególne jego cechy – należy, przy czym zbiór uczący zawierał informacje o poprawnej kate-

goryzacji obiektu. W zagadnieniu segmentacji sieć musi sama wykryć, na jakie kategorie i w jaki sposób podzielić obiekty podawane na wejściu. Najbardziej znanym wariantem sieci uczonej bez nauczyciela są samoorganizujące mapy cech (*self organising feature map, SOFM*), nazywane też od nazwiska twórcy sieciami **Kohonena**. Zagadnienia sieci samoorganizującej się, obejmują zakres logiki rozmytej i systemów neuronowych rozmytych i wykraczają poza ramy tematyczne niniejszego podręcznika.

BIBLIOGRAFIA

Bladowski S. *Metody sieciowe w planowaniu i organizacji pracy*. Wydawnictwo PWE Warszawa 1970.

Bodny J.A., Murty U.R. *Graph Theory with Applications*. American Elsevier. 1979.

Bojarski W. *Podstawy analizy i inżynierii systemów*. PWN Warszawa 1984.

Clark J., Holton A. *A First Look At Graph Theory*. World Scientific Publishing. 1991.

Deo N. *Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce*. Wydawnictwo PWN. Warszawa 1980.

Dress G., Reiff K.O. *Zagospodarowanie placu budowy*. Arkady. Warszawa 1975.

Dyżewski A. *Technologia a organizacja budowy. Cz. II. Organizacja i planowanie budowy.* Arkady. Warszawa 1971.

Elmaghraby S.E. *An Algebra for the Analysis of Generalized Activity Networks*. Management Science 1964, No. 3.

Elsner H. *A Generalized Network Approach to the Planning and Scheduling of a Research Project*, „Operational Research" 1962, vol. 10.

Fusek A., Nowak K., Podlewski H. *Analiza drogi krytycznej. CPM i PERT*. Wydawnictwo PWE, Warszawa 1967.

Gass S.L. *Programowanie liniowe. Metody i zastosowania*. PWN Warszawa 1976.

Goliński J. *Metody optymalizacyjne w projektowaniu technicznym*. WNT. Warszawa 1974.

Gruszczyński J. *Organizacja i planowanie budowy*. Wydawnictwo WSR. Monografie i skrypty. Kraków 1970.

Hellwig. Z. red. praca zbiorowa. *Elementy rachunku ekonomicznego*. wydanie III. PWE, Warszawa 1985.

Idźkiewicz A. *PERT. Metody analizy sieciowej*. PWN Warszawa 1967.

Ignasiak E. (red.). *Badania operacyjne*, PWE, Warszawa 2001.

Ignasiak E. *Optymalne struktury projektów*. PWE, Warszawa 1977.

Ignasiak E. *Programowanie sieciowe*. PWE, Warszawa 1975.

Jaworski K. M. *Metoda rozdziału zapasu czasu czynności w stochastycznych programach sieciowych*. Archiwum Inżynierii Lądowej 1/78.

Jaworski K. M. *Wprowadzenie do problematyki jakości harmonogramów budowlanych*. Przegląd Budowlany 11/95.

Jaworski K. M. *Zagadnienie krytyczności w planowaniu robót budowlanych*. Archiwum Inżynierii Lądowej 4/80.

Jaworski K.M. *Metodologia projektowania realizacji budowy*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999.

Jaworski K.M., Borowik A., A.: *Planowanie realizacji procesów budowlanych przy zastosowaniu grafów dysjunktywnych*. Archiwum Inżynierii Lądowej 4/86.

Jaworski K.M., Lenkiewicz W. *Organizacja i planowanie w budownictwie*. Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1992.

Korzan B. *Elementy teorii grafów i sieci*. WNT, Warszawa 1978.

Kotarbiński T. *Traktat o dobrej robocie*. Wydawnictwo Ossolineum. Warszawa 1975.

Krawczyk S. *Badania operacyjne dla menedżerów*, AE, Wrocław 1996.

Krawczyk S. *Metody ilościowe w logistyce (przedsiębiorstwa*). Wydawnictwo C.H. Beck. Warszawa 2001.

Krawczyk S. *Metody ilościowe w planowaniu (działalności przedsiębiorstwa)* Wydawnictwo C.H. Beck. Warszawa 2001.

Kukuła K. (red). *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993.
Kulikowski J. L. *Zarys teorii grafów. Zastosowania w technice*. PWN. Warszawa 1986.
Lange O. *Ekonomia polityczna* t.1 Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa 1969.
Łęski J. *Systemy neuronowo-rozmyte*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne. Warszawa 2008.
Martyniak Z. *Metody organizowania procesów pracy*. PWE. Warszawa 1996.
Martyniak Z. red. praca zbiorowa. *Nowe metody organizacji i zarządzania*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej. Kraków 1998.
Ore O. *Wstęp do teorii grafów*. Wydawnictwo PWN Warszawa 1969.
Połoński M. *Planowanie realizacji inwestycji melioracyjnych w funkcji czasu i środków na podstawie harmonogramów sieciowych*. Wydawnictwo Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego, Seria: Rozprawy Naukowe i Monografie nr 203. Warszawa 1995.
Porębski Z., Jarosławski K. *Metody analizy drogi krytycznej i ich zastosowanie w przedsiębiorstwie*. WNT, Warszawa 1970.
Radzikowski W. *Matematyczne techniki zarządzania*. Wydawnictwo PWE, Warszawa 1980.
Supernat J. *Techniki decyzyjne i organizatorskie*. Kolonia Limited. Wrocław 2003.
Trzaskalik T. (red.). *Pakiet programów dydaktycznych programowania liniowego*. AE, Katowice 1996.
Trzaskalik T. *Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem*. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne. Warszawa 2003.
Trzaskalik T. *Modelowanie optymalizacyjne*. Absolwent, Łódź 2001.
Trocki M, Grucza B., Ogonek K. *Zarządzanie projektami*. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne. Warszawa 2003.
Wagner H. M. *Badania operacyjne. Zastosowania w zarządzaniu*. PWH. Warszawa 1980.
Wilson R.J., Beineke L.W. *Applications of Graph Theory*. Academic Press 1979.
Wilson R. J. *Wprowadzenie do teorii grafów*. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa 2007.
Zieleniewski J. *Organizacja i zarządzanie*. Wydawnictwo PWN. Wyd. 7. Warszawa 1981.
Żuber R. *Metody sieciowe w planowaniu przygotowania produkcj.*, Przegląd Organizacji 1974, nr 10.
Żuber R. *Technika planowania i kierowania przedsięwzięciami badawczymi i projektowymi za pomocą sieci stochastycznych*. Politechnika Warszawska, Warszawa 1997.
Żuber R. *Zarządzanie przedsięwzięciami*. Politechnika Warszawska, Warszawa 1999.

GRAFY I SIECI W TECHNIKACH DECYZYJNYCH

Streszczenie

„Grafy i sieci w technikach decyzyjnych", w założeniu autora jest podręcznikiemprzeznaczonym dla studentów z kierunków zarządzanie i inżynieria produkcji. Kierunek ten, szczególnie w jego zakresie dotyczącym inżynierii produkcji koncentruje się na zarządzaniu opartym na szkole ilościowej i teorii systemów jako uzupełniającą wobec kierunków klasycznych i behawioralnych. Ta idea zarządzania koncentruje się na sposobie podejmowania decyzji wspomaganych modelowaniem i programowaniem matematycznym. Badania operacyjne i teoria grafów są zbiorami wielu różnych metod i algorytmów umożliwiających optymalizację procesu poszukiwania decyzji optymalnych. W ostatnich latach daje się zauważyć powrót do badań operacyjnych jako doskonałego narzędzia menedżerskiego. Powrót ten przejawia się w mnogości podręczników i publikacji ukazujących się ostatnio na rynku wydawniczym, a dotyczących tych zagadnień. Oczywiście rozwój techniki informatycznej i związany z tym rozwój teorii grafów przyczynił się do tego w znacznej mierze. Przedstawiany podręcznik nie zawiera nowych elementów rozwijających teorie grafów czy teorię badań operacyjnych, jest tylko próbą uporządkowania i skoncentrowania w jednym miejscu wybranych metod praktycznego wspomagania decyzji menedżerskich. Zakres problematyki zawartej w podręczniku jest stosunkowo wąski, dotyczy bowiem tych metod i technik zarządzania, które z szerokiej gamy metod ilościowych wykorzystują te, które w jakiejś mierze wykorzystują grafy, drzewa lub sieci. Zamierzeniem autora było napisanie podręcznika stanowiącego pomoc dla studentów w nauce przedmiotów, takich jak badania operacyjne, logistyka czy zarządzanie produkcją i usługami, koncentrując się głownie nie na teorii a praktyce podejmowani decyzji.

Rozdziały 1, 2 i 3 wprowadzają Czytelnika w zagadnienie grafów, sieci i harmonogramów i ich możliwości wykorzystania w procesach decyzyjnych.

Rozdziały 4 i 5 pokazują proste techniki konstrukcyjne i obliczeniowe grafów sieciowych o zasadniczo odmiennej konstrukcji. Jedne z nich opierają się na zasadzie reprezentowania czynności przez krawędzi (CPA) inne oparte na czynności w węźle (MPM).

Rozdział 6 poświęcony został technikom optymalizacyjnym w sieciach, od techniki planowania zasobów poprzez analizę przepływu w sieciach do analizy czasowo-kosztowej.

Rozdział 7 przedstawia sieci o stochastycznej strukturze logicznej (GERT) i przykładowy sposób ich konstruowania i obliczania.

Dwa następne rozdziały pokazują wykorzystanie sieci zależności do praktycznego rozwiązywania problemów decyzyjnych związanych z planowaniem infrastrukturalnym. Zagadnienie konstrukcji minimalnego drzewa rozpinającego zaprezentowane zostało na przykładzie optymalnego planowania sieci światłowodowej, a problem najkrótszej drogi w grafie w optymalizacji zagadnień transportowych.

Pomocne w procesie podejmowani decyzji w warunkach niepełnej informacji, szczególnie w procesie wieloetapowym, są drzewa decyzyjne. W rozdziale 10 zamieszczono sposób przedstawienie wieloetapowego problemu decyzyjnego

w postaci grafu (drzewa decyzyjnego) oraz metodę wyboru optymalnej decyzji w zadanych warunkach zmienności stanu natury.

Zagadnienia związane z planowaniem produkcji bardzo często koncentrują się na problemie przepływów międzystanowiskowych i określaniu wewnętrznego zapotrzebowania materiałowego w procesie produkcji – (*Material Requirement Planning*). Poszukiwanie optymalnego rozwiązania MRP wymaga modelowego zapisu procesu produkcji w postaci grafu (graf Gozinto) a następni, w postępowaniu algebraicznym wyznaczenie zmiennych decyzyjnych. Rozdział 11 poświęcony został tej tematyce.

Rozdział kończący (12) obejmuje nową technikę poszukiwania optymalnych decyzji, których podstawą są sztuczne sieci neuronowe. Metody podejmowania decyzji z wykorzystaniem sztucznej inteligencji są stosunkowo nowym i przyszłościowym rozwiązaniem, a powszechne wykorzystanie ich w technikach decyzyjnych, mimo coraz szerszego zastosowania, wydaje się być dopiero na początku drogi rozwoju.

GRAPH AND NETWORK ANALYSIS IN DECISION MAKING TECHNIQUES

Summary

Graph And Network Analysis In Decision Making Techniques, has been designed by the Author as a handbook addressed mainly to the students of Management and Process Engineering. This programme, particularly in its part focused on process engineering, deals mainly with management based on operational research and system theory as supplementary to classical and behavioral school. This concept of management concentrates on decision making technique supported by mathematical modeling and programming. Operational researchand graph theory are sets ofmany different methods and algorithms facilitating the process offinding optimum decision process. A revival of operational research methods as an excellent tool of decision making process has been observed recently, especially on editors market as a diversity of handbooks and other publications addressing these issues.Obviously, both the development of computer science and graph theory have significantly contributed to this process.However, the presented handbookdoes not contain any new elements advancing operational research or graph theory but is just an attempt to arrange some methods and decision making technique to aid students better absorb this kind of knowledge. The scopeof the handbook is relatively narrowed focusingon these decision making techniques which are directly connected to the graph theory. It was the Author's intention to write a handbook which would be helpful to students studying subjects like logistic, production process or service management, but would focusrather ondecision making in practice than considering its theoretical basis.

Chapters 1,2 and 3 introduce the readers to graph and network theory as well as scheduling techniques and present their applications in decision making processes.

Chapters 4 and 5 show simple network analysis and computational techniquesoftwo completely different kinds of graphs. The first ones concern the graphs with activities on the edges (CPM) – the other – activitiesin the nodes (MPM-METRA).

Chapter 6 is devoted to optimization techniques in network analysis fromresources planning techniques, throughflow analysis to time-cost analysis.

Other kind of networks is presented in chapter 7. The networks with stochastic logical structure have been discussed(GERT method) as well ascomputational techniquesof analysis.

The next two chapters show (dependency) network analysis used for practical engineering problem solvingin some infrastructural utilities planning. Minimum tacking trees problem is shown on theexample of optical waveguideevenlydistributed, whereas theshorter path seeking problem has been presented on an example of real transportation issue.

The decision trees are considered as very helpful tools of decision making problem underuncertain information circumstances.In Chapter 10,the multiphase

decision problem is shown and the computational techniques are presented using decision treegraph.

The problems of production process planning usually focus on optimization of flow between work places ormaterial requirement planning.Finding an optimum solution of MRP requires a mathematical model in a graph shape (Gozinto graph) followed by determining decision variables.Chapter 11 is fully devoted to this problem.

Final Chapter 12 presents the new techniques ofoptimal decision seeking based on the neuron networks. Methods of decision making using the artificial intelligence arerelatively newtools used in this process but with considerable future potential. However despite extending applications, their common use in decision making techniques seems to be only at the start of progress.