INFRASTRUKTURA I EKOLOGIA TERENÓW WIEJSKICH
INFRASTRUCTURE AND ECOLOGY OF RURAL AREAS

Nr 3/2010, POLSKA AKADEMIA NAUK, Oddział w Krakowie, s. 157–164
Komisja Technicznej Infrastruktury Wsi

Agnieszka Bitner

RELACJE ALLOMETRYCZNE DLA MIAST ZACHODZĄCE MIĘDZY LICZBĄ DZIAŁEK, POLEM POWIERZCHNI MIASTA ORAZ LICZBĄ MIESZKAŃCÓW

ALLOMETRIC RELATIONSHIP FOR CITIES LINKING NUMER OF LAND PARCELS, AREA OF A CITY, AND POPULATION

Streszczenie

W pracy zbadano relacje allometryczne opisujące związki pomiędzy liczbą działek w granicach administracyjnych miasta, N_d, całkowitym polem powierzchni miasta, S_{tot}, oraz liczbą mieszkańców miasta, N. W wyniku przeprowadzonej analizy wyznaczone zostały trzy wykładniki γ_S, γ_d, oraz γ występujące, odpowiednio, w relacjach allometrycznych $S_{tot} \propto N^{\gamma S}$, $N_d \propto N^{\gamma d}$, oraz, $N_d \propto S_{tot}^{\gamma}$.

Słowa kluczowe: relacja allometryczna, miasto, działka, pole powierzchni miasta, liczba mieszkańców

Summary

In this paper the allometric relationship between the number of land parcels within administrative boundaries of a city, N_d, total area of a city, S_{tot}, and the population of a city, N, were investigated. As a result of the analysis, the three exponents γ_S, γ_d, and γ of the allometric relations $S_{tot} \propto N^{\gamma S}$, $N_d \propto N^{\gamma d}$, and $N_d \propto S_{tot}^{\gamma}$ were determined.

Key words: *allometric relation, city, land parcel, area of a city, population*

WPROWADZENIE

Już w XVII wieku Galileusz wykazał, że nie istnieją olbrzymy wiele razy większe od człowieka. Jeśli hipotetycznie taki olbrzym byłby 10 razy większy (wyższy, mający dłuższe stopy) od człowieka, to jego objętość oraz masa byłyby 1000 razy większe. Obciążenie jednostki powierzchni przekroju kości olbrzyma wzrosłoby w porównaniu z człowiekiem 1000/100 = 10 razy. Olbrzym okazałby się wtedy zbyt „kruchy", żeby funkcjonować. Analogiczne rozumowanie stosuje się dla wyjaśnienia wielu ogólnych prawidłowości obserwowanych w przyrodzie. Powyższy przykład pokazuje istotę allometrii – nauki o relacjach między wybranymi wielkościami charakteryzującymi układ. Relacja ta zwana jest również prawem potęgowym czy prawem skalowania. Ogólnie, prawa skalowania mówią nam w jaki sposób pewne mierzalne własności systemu zmieniają się, na przykład, wraz z jego rozmiarami liniowymi (skalą). Wspomniane własności (miary) systemu to, na przykład, jego objętość, obwód, masa, czy pole powierzchni. Może to być również liczba różnych gatunków zwierząt zamieszkujących dany obszar. Prawo skalowania można zapisać w formie następującej relacji potęgowej:

$$Y \propto X^{\alpha} \tag{1}$$

gdzie X jest rozmiarem liniowym układu, Y jego wybraną miarą, natomiast α oznacza tutaj wykładnik definiujący prawo potęgowe. Wykładnik ten może być liczbą całkowitą (na przykład, $\alpha = 3$ jeśli relacja skalowania opisuje związek między objętością a rozmiarami liniowymi bryły), może przyjmować również wartości ułamkowe. Te ostatnie pojawiają się często jeśli skalowanie dotyczy układów fraktalnych [Mandelbrot 1977, Bejan 2000; Peitgen, Richter 1986].

Prawom skalowania podlega wiele zjawisk zarówno naturalnych jak i tych będących dziełem człowieka [Newman 2005]. W szczególności prawa skalowania dotyczą rozwoju i przestrzennej organizacji miast. Do najbardziej znanych należy prawo Zipfa [Zipf 1949; Gabaix, Ioannides 2004], zgodnie z którym rozkład wielkości miast uszeregowanych według liczby mieszkańców jest opisany funkcją odwrotnie potęgową o wykładniku $n = 2$. Rozkład pól powierzchni miast jest opisany prawem odwrotnie potęgowym o wykładniku $n = 1{,}85$ [Makse i in. 1995, 1998]. W pracach [Batty, Longley 1994; Chen, Zhou 2008] przedstawiono empiryczny dowód, że obszary metropolitarne wykazują morfologię fraktalną. Własności fraktalne zostały niedawno odtworzone w licznych modelach rozwoju przestrzennego dużych systemów urbanistycznych [Makse i in. 1995, 1998; Zanette, Manrubia 1997; Manrubia i in. 1999; Reed 2002]. Najlepiej zbadane relacje allometryczne opisują zależność pomiędzy całkowitą powierzchnią miasta a lego liczbą mieszkańców [Batty, Longley 1994; Nordbeck 1971] oraz zależność między powierzchnią miasta a całkowitą długością jego granicy (obwodu) [Makse i in. 1995; Zhang i in. 2008]. Inne relacje dotyczą związku między

powierzchnią miasta a całkowitą powierzchnią jego dróg [Samaniego, Moses 2008]. *Celem niniejszej pracy jest ustalenie relacji allometrycznych pomiędzy całkowitą liczbą działek w mieście, jego polem powierzchni oraz liczbą mieszkańców.*

WYNIKI ANALIZY

Baza danych. Do analiz wykorzystane zostały dane z siedmiu polskich miast: Krakowa, Zakopanego, Starogardu Gdańskiego, Bytomia, Kielc, Jędrzejowa, Łodzi oraz jednego miasta szwedzkiego – Malmö. Baza danych zawiera informacje o polach powierzchni poszczególnych działek ewidencyjnych znajdujących się w obrębie granic administracyjnych miasta. Podstawowe charakterystyki, takie jak liczba mieszkańców, pole powierzchni, liczba działek oraz średnie pole powierzchni, zestawione zostały w tabeli 1 (stan na rok 2002). Jak widać, liczba mieszkańców zmienia się w zakresie dwóch rzędów wielkości. Dodatkowo, miasta które były przedmiotem badań różnią się pod względem położenia geograficznego. Różne były też okresy ich powstania oraz procesy ekonomiczne i historyczne wpływające na ich rozwój.

Tabela 1. Zestawienie informacji o analizowanych miastach
Table 1. A summary of inforamtion about the cities analyzed

Miasto City	Całkowita powierzchnia [km^2] Total area [km^2]	Liczba mieszkańców [tys.] Population [Thousands]	Liczba działek Number of parcels	Średnia powierzchnia działki [m^2] Average parcel's area [m^2]
Kraków	326,84	734,4	146,948	2224,32
Zakopane	84,25	29,7	26,101	3227,98
Starogard Gd.	25,27	50,6	10,024	2521,42
Bytom	69,39	199,6	33,077	2097,92
Kielce	109,61	209,8	41,194	2660,76
Jędrzejów	11,37	18,1	4,851	2343,13
Łódź	288,26	783,7	84,856	3397,07
Malmö	174,10	260,6	29,756	5850,41

Relacje allometryczne. Przedmiotem badań były wzajemne związki między całkowitym polem powierzchni miasta, S_{tot}, liczbą wszystkich działek w mieście, N_d, oraz jego liczbą mieszkańców, N. Przeprowadzając analizę danych zakładano, że prawa skalowania opisujące w jaki sposób liczba działek oraz powierzchnia miasta zmieniają się wraz z liczbą jego mieszkańców dane są przez następujące relacje potęgowe:

$$S_{tot} \propto N^{\gamma_S} \tag{2}$$

$$N_d \propto N^{\gamma_d} \tag{3}$$

$$N_d \propto S_{tot}{}^{\gamma} \tag{4}$$

Wyznaczenie praw skalowania polegało na ustaleniu wykładników γ_S, γ_d, oraz γ występujących w równaniach (2) – (4).

Rysunek 1 przedstawia zależność logarytmu naturalnego liczby działek znajdujących się w obrębie granic administracyjnych miasta od logarytmu naturalnego całkowitego pola powierzchni miasta. Punkty na wykresie reprezentują osiem miast opisanych w tabeli 1. Linia prosta dopasowana do punktów metodą najmniejszych kwadratów dana jest równaniem

$$ln\, N_d = (6{,}31 \pm 0{,}50) + (0{,}90 \pm 0{,}11) ln\, S_{tot}.$$

Mamy zatem

$$\gamma = 0{,}90 \pm 0{,}11 \tag{5}$$

Na rysunku 2 przedstawiona została zależność logarytmu naturalnego pola powierzchni miasta, S_{tot}, oraz liczby działek, N_d, od logarytmu naturalnego liczby mieszkańców miasta, N, dla ośmiu miast przedstawionych w tabeli 1. Do danych zostały dopasowane linie proste metodą najmniejszych kwadratów. Dla funkcji $N_d(N)$ otrzymano zależność $\ln N_d = (6{,}89 \pm 0{,}71) + (0{,}69 \pm 0{,}14) \ln N$, natomiast dla funkcji $S_{tot}(N)$ otrzymano:

$$ln\, S_{tot} = (0{,}85 \pm 0{,}80) + (0{,}73 \pm 0{,}16) ln\, N.$$

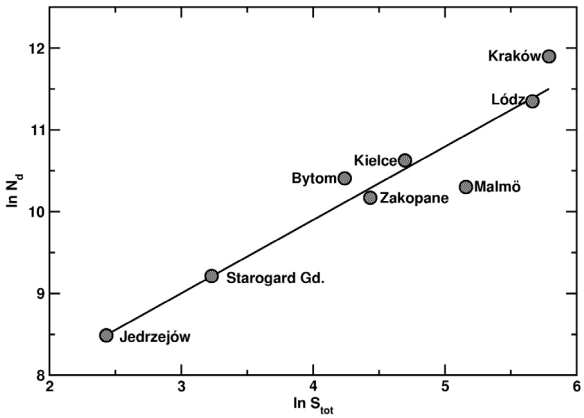
Stąd

$$\gamma_d = 0{,}69 \pm 0{,}14 \tag{6}$$

$$\gamma_S = 0{,}73 \pm 0{,}16 \tag{7}$$

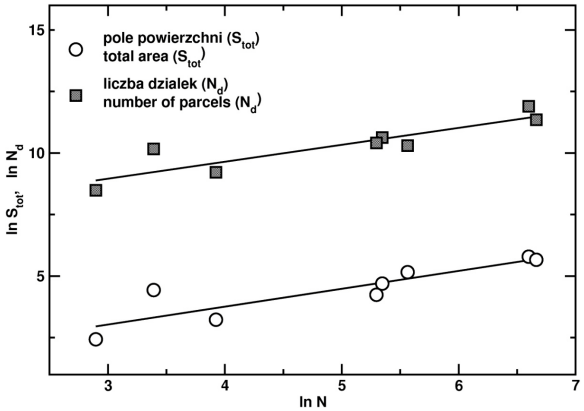
Współczynniki korelacji, *r,* dla wyznaczonych zależności $N_d(N)$, $S_{tot}(N)$, oraz $N_d(S_{tot})$ wynosiły, odpowiednio, 0,896, 0,885, oraz 0,958.

Odnotujmy, że trzy wykładniki γ oraz γ_S i γ_d nie są niezależne. Wykładnik γ można bowiem wyznaczyć na podstawie wartości γ_S i γ_d, korzystając z relacji $\gamma = \gamma_d / \gamma_S$, która wynika wprost ze wzorów (2) – (4). Na podstawie (6) i (7) otrzymujemy wówczas $\gamma = 0{,}95 \pm 0{,}28$. Jest to wartość zgodna w granicach błędu statystycznego z wartością obliczoną bezpośrednio metodą regresji, $\gamma = 0{,}90 \pm 0{,}11$.



Rysunek 1. Logarytm naturalny liczby działek, N_d, w funkcji logarytmu naturalnego całkowitego pola powierzchni miasta, S_{tot}, mierzonego w km^2. Linia prosta dopasowana do danych metodą najmniejszych kwadratów daje $\gamma = 0{,}90 \pm 0{,}11$ (por. wzór (4))

Figure 1. Natural logarithm of the number of the parcels, N_d, as a function of the natural logarithm of the total city area, S_{tot}, expressed in km^2. The linear least-squares fitting applied to the data yielded $\gamma = 0{,}90 \pm 0{,}11$ (cf. equation (4))



Rysunek 2. Wykres zależności logarytmu naturalnego liczby działek w mieście, N_d, oraz całkowitego pola powierzchni miasta, S_{tot}, mierzonego w km^2, w funkcji logarytmu naturalnego liczby mieszkańców N (w tysiącach). Do danych zostały dopasowane metodą najmniejszych kwadratów linie proste. Otrzymano następujące wartości wykładników: $\gamma_d = 0{,}69 \pm 0{,}14$ oraz $\gamma_S = 0{,}73 \pm 0{,}16$ (por. wzory (2) i (3))

Figure 2. Natural logarithm of the number of the parcels, N_d, and of the total city area, S_{tot}, expressed in km^2, plotted as a function of the natural logarithm of the number of inhabitants, N (in Thousands). The linear east-squares fitting applied to the data gave the following values of the exponents: $\gamma_d = 0{,}69 \pm 0{,}14$ and $\gamma_S = 0{,}73 \pm 0{,}16$ (cf. equations (2) and (3))

Średnie pole powierzchni S_{sr} działki jest ilorazem całkowitej powierzchni miasta i liczby działek. Stąd, na mocy (2) i (3)

$$S_{sr} = \frac{S_{tot}}{N_d} \propto N^{\gamma_S - \gamma_d} = N^{0,04} \tag{8}$$

Powyższy wynik oznacza, że średnia powierzchnia działki praktycznie nie zależy od wielkości (liczby mieszkańców) miasta lecz fluktuuje wokół pewnej stałej wartości. Znajduje to potwierdzenie w danych przedstawionych w tabeli 1, gdzie wielkość S_{sr} dla polskich miast oscyluje faktycznie wokół wartości 2500 m^2 (wyjątek stanowi tylko szwedzkie miasto Malmö).

DYSKUSJA

Fakt, że trzy otrzymane wykładniki γ_S, γ_d, oraz γ nie są liczbami całkowitymi może wydawać się nieco zaskakujący. Wynik ten jest jednak zrozumiały kontekście rozwijanych ostatnio intensywnie nowych teorii opisujących rozwój aglomeracji miejskich. Obok istniejącego od dawna tak zwanego „modelu grawitacyjnego" aglomeracji [Reilly 1931], powstało podejście traktujące rozrost metropoli wokół centrum przemysłowo-administracyjnego jako proces samoorganizacji [Batty i in. 1989; Batty, Longley 1994; Makse i in. 1995; Allen 1997]. Wspomniane procesy samoorganizacji prowadzą do powstania *fraktalnej* morfologii miast. W konsekwencji relacje allometryczne wiążące własności miast takie jak jego obwód, rozmiary liniowe, populacja itp. opisane są na przez wykładniki ułamkowe. Dotyczy to również – jak pokazują otrzymane wyniki – wzajemnej relacji łączącej liczbę działek, pole powierzchni i populację miasta.

Należy odnotować, że Nordbeck [1971] sugeruje, iż współczynnik γ_s powinien mieć wartość równą 2/3. Dla miast skandynawskich uzyskał on współczynnik bardzo zbliżony do tej wartości, $\gamma_s = 0,65$. Inni autorzy [Muth 1969; Woldenberg 1973; Batty, Longley 1994] uzyskali z kolei wykładniki $\gamma_s < 1$ bliskie jedności. Podstawowa trudność związana z wyznaczeniem γ_S wynika z niejednoznaczności definicji pola powierzchni miasta. Uzyskany w niniejszej pracy wykładnik $\gamma_s = 0,73$, obliczony na podstawie powierzchni administracyjnej miasta, jest zatem bliższy wartości proponowanej przez Nordbecka.

Relacja skalowania (2) z wykładnikiem $\gamma_s < 1$ oznacza, że gęstość zaludnienia rośnie wraz z liczbą mieszkańców miasta. Poniżej przedstawię argumenty, że relacja ta może posłużyć do *jakościowego* wyjaśnienia mechanizmu powodującego wzrost ceny jednostkowej gruntu wraz ze wzrostem liczby mieszkańców miasta. Można mianowicie przyjąć założenie, że cena jednostki powierzchni gruntu, C^{jed}, odpowiada równowadze między podażą i popytem.

W przybliżeniu można przyjąć, że cena ta jest wprost proporcjonalna do wielkości środków jakimi dysponuje populacja żyjąca na terenie miasta, a odwrotnie proporcjonalna do zasobów gruntu oferowanych do sprzedaży. Można założyć, zasób gruntów jest proporcjonalny do całkowitego pola powierzchni miasta, S_{tot}. Wielkość środków jest natomiast wprost proporcjonalna do liczebności populacji miasta, N. Oznacza to, że cena jednostkowa gruntu jest proporcjonalna do następującego ilorazu $C^{jed} \propto N/S_{tot}$. Wykorzystując relację (2) dostajemy następujący związek:

$$C^{jed} \propto N^{(1-\gamma_S)} = N^{0,27} \tag{9}$$

Oznacza to, że cena gruntu jest proporcjonalna do gęstości zaludnienia i rośnie wraz z liczbą mieszkańców miasta. Innymi słowy, stosunek ceny jednostkowej gruntu w dwóch miastach o populacjach N_1 i N_2 jest równy $C_1^{jed} / C_2^{jed} = (N_1 / N_2)^{0.27}$. Dla przykładu, cena gruntu w mieście liczącym milion mieszkańców powinna być około 3,5 razy wyższa niż w mieście liczącym dziesięć tysięcy mieszkańców. Jest to wynik realistyczny. W przedstawionym powyżej rozumowaniu zakładamy, że jedynym czynnikiem różnicującym poziom cen jest liczba mieszkańców. Pomijamy wpływ takich czynników jakim jest zróżnicowanie rozwoju ekonomicznego porównywanych miast czy ich lokalizacja. Oczywiście, aby sprawdzić w jakim stopniu związek (9) opisuje zależność cen jednostkowych gruntu od wielkości miasta należy przeprowadzić dalsze badania.

PODSUMOWANIE

W pracy zostały zbadane związki pomiędzy liczbą działek, polem powierzchni oraz liczbą mieszkańców miasta. Do badań użyto dane dotyczące ośmiu miast o liczbie mieszkańców zamieniającej się w zakresie dwóch rzędów wielkości. Wyznaczone zostały wartości trzech wykładników $\gamma_S = 0,73$, $\gamma_d = 0.69$, oraz $\gamma = 0,90$ występujących w relacjach allometrycznych (2) – (4). Otrzymana wartość wykładnika γ_S mieści się w zakresie wartości znanych z literatury, obliczonych dla innych miast. W pracy przedstawiono również argumenty, że otrzymane związki allometryczne mogą służyć do jakościowego wyjaśnienia wzrostu cen działek gruntowych wraz z wielkością miasta.

BIBLIOGRAFIA

Allen P.M. *Cities and regions as self-organizing systems: models of complexity*. Gordon and Breach Science Pub., Amsterdam 1997.

Batty M., Fotheringham A. i Longley P. *Diffusion-limited Aggregation and the Fractal Nature of Urban Growth*. Papers of the Regional Science Association, Vol. 67, 1989.

Batty M. i Longley P. *Fractal Cities: A Geometry of Form and Function*. Academic, San Diego 1994.
Bejan A. *Shape and Structure, From Engineering to Nature*. Cambridge University Press, Cambridge 2000.
Chen Y. i Zhou Y. *Scaling laws and indications of self-organized criticality in urban systems*. Chaos, Solitons and Fractals 35, 2008, s. 85–98.
Gabaix X. i Ioannides Y.M. *The evolution of the city size distribution* [w:] Henderson V, Thisse J (eds) *Handbook of urban and regional economics*. Vol 4. Elsevier, Amsterdam 2004, s. 2341–2376.
Makse H.A., Andrade J.S., Batty M., Havlin S. i Stanley H.E. *Modeling urban growth patterns with correlated percolation*. Phys Rev E Stat Phys Plasmas Fluids Relat Interdiscip Topics 28, 1998, s. 7054–7062.
Makse H.A., Havlin S. i Stanley H.E. *Modeling Urban Growth Patterns*. Nature, Vol. 377, 1995.
Mandelbrot B.B. *Fractal Geometry of Nature*. Freeman, New York 1977.
Manrubia S.C., Zanette D.H. i Sole R.V. *Transient Dynamics and scaling phenomena in urban growth*. Fractals 1999, 7:1–8.
Newman M.E.J., *Power laws*. Pareto distributions and Zipf's law. Contemp Phys 46, 2005, s. 323–351.
Nordbeck S. *Urban Allometric Growth*. Geografiska Annaler, 1971, 53B.
Muth R. *Cities and Housing: The Spatial Pattern of Urban Residential Land Use*. Chicago University Press, Chicago 1969.
Peitgen H.-O., P. H. Richter P.H. *The beauty of fractals*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo 1986.
Reed W.J. *On the rank-size distribution for human settlements*. J Reg Sci 2002, 41:1–17.
Reilly W.J. *The Law of Retail Gravitation*. New York 1931.
Samaniego H., Moses M.E. *Cities as organisms: Allometric saling of urban road networks*. J. Transport Land Use, 1, nr 1, 2008.
Woldenberg M. *An Allometric Analysis of Urban Land Use in the United States*. Ekistics 36, 1973, s. 282–290.
Zipf G.K., *Human behavior and the principle of least effort*. Addison-Wesley, Cambridge 1949.
Zanette D.H. i Manrubia S.C. *Role of intermittency in urban development: a model of large-scale city formation*. Phys Rev Lett 1997, 79:523–526.
Zhang Y., Yu J., Fan W. *Fractal features of urban morphology and simulation of urban Bondary*. Geo-Spatial Information Sci. 11, 2008, s. 121–126.

dr Agnieszka Bitner
Katedra Zastosowań Matematyki
Uniwersytet Rolniczy
ul. Balicka 253C
30-198 Kraków
e-mail: rmbitner@cyf-kr.edu.pl

Recenzent: *Prof. dr hab. Ryszard Źróbek*